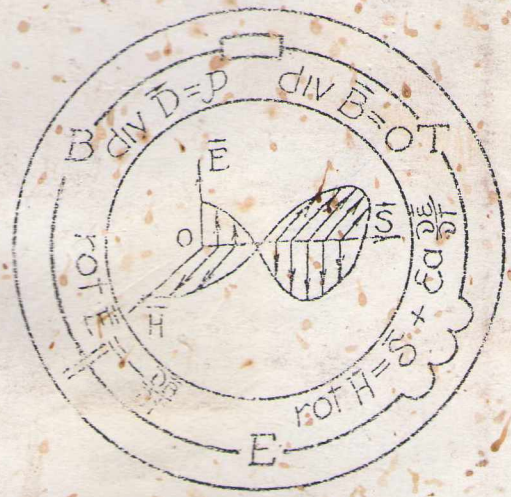
621.3
P 88

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

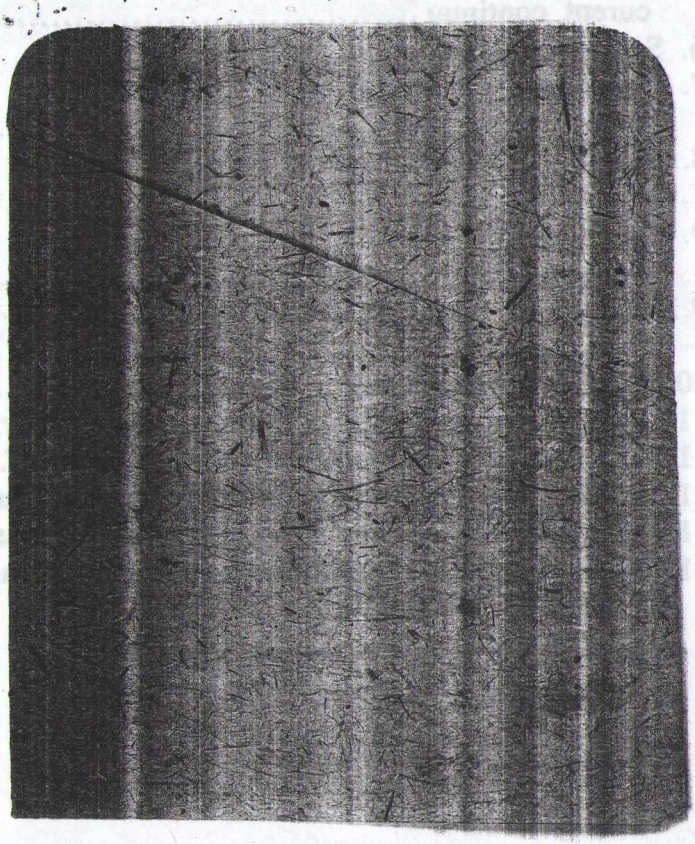
Arhip Potâng

# BAZELE TEORETICE ALE ELECTROTEHNICII




Chișinău
2003

CIM



**Universitatea Tehnică a Moldovei**
**Catedra Bazele Teoretice ale Electrotehnicii**

*Arhip Potâng*

# BAZELE TEORETICE ALE ELECTROTEHNICII

Procese tranzitorii în circuite liniare
Cuadripoli şi filtre electrice
Circuite electrice cu parametrii distribuiţi

***Ciclu de prelegeri***

1036569

**Chişinău**
**U.T.M.**
**2003**

Prezentul ciclu de prelegeri este destinat pentru uzul studenţilor facultăţilor de Energetică, Calculatoare, Informatică şi Microelectronică, şi Radioelectronică .

*Redactor responsabil: conf. univ. dr. Anatolie Carcea*
*Recenzent: conf. univ. dr. Ilie Macovei*

---

Bun de tipar 24.04.03 Formatul hârtiei 60x84 1/16
Hîrtie ofset. Tipar ofset . Coli de tipar 12,75.
Tirajul 200 ex. Comanda nr. 88 .

---

U.T.M., 2004 , Chişinău , bd. Ştefan cel Mare , 168
Secţia Redactare şi Editare a U.T.M.
2068, Chişinău, str. Studenţilor, 11

© U.T.M., 2003

# CUPRINS

## PROCESE TRANZITORII ÎN CIRCUITELE ELECTRICE LINIARE


1. METODA CLASICĂ.....9

1.1. Noţiuni fundamentale. Legile comutaţiei.....9
1.2. Calculul proceselor tranzitorii în circuite electrice liniare prin metoda clasică.....12
1.3. Metoda generală de calcul a proceselor tranzitorii în circuitele electrice liniare.....15
1.4. Caz general de calcul prin metoda clasică a proceselor tranzitorii (exemplu 2).....16
1.5. Conectarea circuitului cu r, L legate în serie la o sursă de curent continuu.....23
1.6. Scurtcircuitarea ramurii cu r, L.....24
1.7. Conectarea circuitului cu r, L la o sursă de curent alternativ.....28
1.8. Circuit r, C conectat la o sursă de curent continuu.....31
1.9. Circuitul r, C conectat la o sursă de curent alternativ.....32
1.9.1. Circuit multiplu ramificat, cu un singur condensator.....34
1.10. Scurtcircuitarea ramurii cu r, C.....35
1.11. Procesul tranzitoriu în circuit neramificat cu r, L, C.....36
1.11.1. Descărcarea aperiodică a condensatorului.....37
1.11.2. Descărcarea aperiodică-critic a condensatorului.....41
1.11.3. Descărcarea periodico – oscilantă a condensatorului.....42
1.11.4. Determinarea mărimilor instantanee $u_C$, $i$ şi $u_L$.....44

2. METODA OPERAȚIONALĂ.....47
2.1. Metoda operațională pe baza transformării Laplace.....48
2.2. Imaginea constantei.....49
2.3. Transformata Laplace a funcției exponențiale $f(t)=e^{\alpha.}$ .....49
2.4. Transformata Laplace a derivatei unei funcții de timp .....50
2.5. Transformata Laplace a derivatei de ordinul doi a unei funcții de timp.....51
2.6. Transformata Laplace a integralei unei funcții de timp $\left(\int_0^t f(t)dt\right)$ .....51
2.7. Teoreme ale transformării Laplace.....54
2.8. Legea lui Ohm sub forma operațională.....56
2.9. Prima teoremă a lui Kirchhoff în forma operațională .. 58
2.10. Teorema a doua a lui Kirchhoff în formă operațională .....58
2.11. Algoritmul de aplicare a metodei operaționale.....59
2.11.1. Trecerea de la imagine la funcția de timp.....59
2.11.2. Formula descompunerii. Deducerea.....60
2.12. Precizări privind aplicarea transformării Laplace la studiul circuitelor electrice.....67

**3. METODA DE CALCUL PE BAZA TRANSFORMĂRII FOURIER. ANALIZA SPECTRALĂ**.....78

3.1. Transformata Fourier.....82
3.2. Legea lui Ohm. Schemele echivalente ale caracteristicilor spectrale (spectrele de frecvenţă).....84
3.3. Algoritmul de calculul al curenţilor şi tensiunilor prin metoda integralei Fourier.....85
3.4. Metoda aproximativă de determinare a originalului prin aplicarea caracteristicii de frecvenţă (metoda trapezului)....89

**4. METODA INTEGRALEI DUHAMEL**.....91
4.1. Algoritmul de calcul prin metoda integralei Duhamel.....92

**5. METODA VARIABILOR DE STARE**.....95

Concluzii privitoare la metodele de calcul a circuitelor în regim tranzitoriu.....98

## CUADRIPOLI ŞI FILTRE ELECTRICE

**6. CUADRIPOLI**.... ..... ..... ..... .....99

6.1. Noţiuni generale şi clasificarea cuadripolilor.. ..... .....99
6.2. Ecuaţiile cuadripolului pasiv..... ... ..... ..... 100
6.3. Interconectarea cuadripolilor..... ..... ..... ....102
6.4. Parametrii secundari ai cuadripolului pasiv ($Z_C$,$g$) ..... 103
6.5. Ecuaţiile cuadriţ ›lului pasiv cu funcţii hiperbolice..... .105
6.6. Impedanţa de intrare a cuadripolului..... ..... ..... .....106
6.7. Determinarea parametrilor $g$, $Z_C$ pe cale experimentală. ..108
6.8. Schemele echivalente ale cuadripolului pasiv.....110
6.9. Diagrama cercului pentru un cuadripol pasiv.....111
6.10.Construcţia diagramei cercului pentru un cuadripol pasiv..113

**7. FILTRELE ELECTRICE**.....121

7.1. Consideraţii generale .....121
7.2. Determinarea benzilor de trecere şi de oprire..... ..... ..... ...123
7.3. Filtrul electric trece – jos..... .... ... .... ... 126
7.4. Filtrul electric trece – jos în regim adaptat. Diagrama de fazori a filtrului..... ..... ..... ..... ..... .....127
7.5. Filtrele electrice trece– sus, trece– bandă, opreşte– bandă ..131

## CIRCUITE ELECTRICE CU PARAMETRI DISTRIBUIŢI

### 8. LINII ELECTRICE LUNGI ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL ..... 137


8.1. Ecuaţiile unei linii omogene ..... 137
8.2. Rezolvarea ecuaţiilor liniei omogene în cazul regimului sinusoidal permanent ..... 140
8.3. Constanta de propagare şi impedanţa caracteristică ..... 142
8.4. Formulele pentru determinarea $\underline{U}$, $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ de la intrare în linie (fig.8.2) ..... 144
8.5. Formulele pentru determinarea $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$ de la ieşire din linie (fig.8.3) ..... 145
8.6. Unda incidentă şi unda reflectată în linie ..... 147
8.7. Coeficientul de reflexie. Viteza de fază. Lungimea undei ..... 149
8.8. Linia fără distorsiuni ..... 150
8.9. Linia adaptivă. Randamentul liniei în regim adaptat ..... 151
8.10. Impedanţa de intrare ..... 153
8.11. Linii fără pierderi ..... 155
8.12. Undele electromagnetice staţionare ..... 156
8.13. Determinarea parametrilor primari ai liniei din regimurile mers în gol şi scurtcircuit ..... 160
8.14. Analogia dintre ecuaţiile liniei cu parametri distribuiţi şi ecuaţiile cuadripolului pasiv ..... 162
8.15. Substituirea cuadripolului prin linia echivalentă lui şi invers ..... 162
8.16. Circuit în scară ..... 164

**9. PROCESE DE TRANZIȚIE ÎN CIRCUITE ELECTRICE CU PARAMETRII DISTRIBUIȚI** ..... 184

9.1. Noțiuni generale ..... 184
9.2. Rezolvarea generală a ecuațiilor liniilor omogene ..... 185
9.3. Relațiile dintre funcțiile $f_1$, $f_2$ și $\varphi_1$,$\varphi_2$ ..... 188
9.4. Procesele electromagnetice la deplasarea undei dreptunghiulare de-a lungul liniei ..... 190
9.5. Schema echivalentă aplicată la studiul fenomenelor ondulatoare în linia cu parametrii distribuiți ..... 192
9.6. Reflexia undelor la sfârșitul liniei ..... 193

**BIBLIOGRAFIE** ..... 204

# PROCESE TRANZITORII ÎN CIRCIUTELE ELECTRICE LINIARE

## 1. METODA CLASICĂ

### 1.1. Noțiuni fundamentale. Legile comutației

În procesul funcționării utilajelor electrice se deosebesc două regimuri și anume: regimul permanent și regimul tranzitoriu. În regim permanent, în circuite de curent continuu curenții și tensiunile rămîn invariabile, iar în circuitele de curent alternativ sunt funcții periodice de timp. În aceste cazuri procesele sunt descrise prin ecuații algebrice, cu ajutorul cărora se pot determina valorile curenților și ale tensiunilor. Trecerea unui circuit electric dintr-o stare în alta este rezultatul comutației: conectarea sau deconectarea surselor sau a unui element de circuit, schimbarea bruscă a parametrilor r, $L$, $C$ ai circuitului. Acest proces se numește tranzitoriu.

Într-un circuit electric pur rezistiv ($r\neq0$, $L=0$, $C\to\infty$) comutațiile nu sunt întâlnite de procese tranzitorii. Procese tranzitorii au loc în circuitele inductive ($L\neq0$) și capacitative ($C\neq\infty$) ce se datorește faptului că stările energetice ale circuitului înainte și după comutație nu corespund. Energia câmpului magnetic al bobinei $\frac{LI^2}{2}$ și energia câmpului electric al condensatorului $\frac{CU^2}{2}$ nu pot să se modifice instantaneu deoarece o asemenea schimbare bruscă a energiei ar necesita o putere $\left(P=\frac{dW}{dt}\to\infty\right)$ infinită ceea ce fizic nu poate să aibă loc fiindcă nu există circuite cu putere infinită. În circuitele electrice inductive și capacitive, procesul tranzitoriu teoretic durează foarte mult (până când se termină schimbul de energie dintre elementele reactive). Practic durata procesului tranzitoriu este limitată deseori la câteva secunde sau submultiple ale aceleia.

Studierea proceselor tranzitorii are o mare însemnătate practică fiindcă permite să se determine valorile maxime ale tensiunilor, care pot fi foarte mari, de câteva ori mai mari decât în regim staţionar.

În multe cazuri, în scopul prevenirii ieşirii din funcţiune a anumitor elemente de circuit se folosesc aparate de protecţia supratensiunilor şi curenţilor. În scopul alegerii aparatajului de protecţie în exploatare este necesar de ştiut valorile maxime ale curenţilor şi tensiunilor ce apar în procesele tranzitorii, precum şi duratele acestora.

Spre deosebire de procesele staţionare, procesele tranzitorii se exprimă prin ecuaţii diferenţiale în conformitate cu teoremele lui Kirchhoff.

Unui circuit electric cu parametrii $r$, $L$, $C$ constanţi îi corespunde o ecuaţie diferenţială neomogenă. După cum se ştie de la matematici soluţia generală a unei astfel de ecuaţii se poate scrie sub forma unei sume de două soluţii şi anume:

$$i(t)=i_f(t)+i_l(t), \qquad (1.1)$$

în care primul termen $i_f(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi se numeşte soluţie de regim forţat sau componentă forţată, iar al doilea termen se obţine la soluţia generală a ecuaţiei omogene (obţinută prin anularea termenului liber) şi se numeşte soluţie de regim liber sau componenta $i_l(t)$ liberă.

Soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale corespunde regimului staţionar după încheierea procesului tranzitoriu. În acest caz curenţii şi tensiunile se determină prin metode de calcul cunoscute pentru regimul staţionar al circuitelor de curent continuu sau alternativ, considerând cunoscute f.e.m. ale surselor şi parametrii circuitului. Mărimile care intervin în această soluţie particulară sunt numite mărimi forţate.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (fără termen liber) corespunde regimului circuitului la care sursa exterioară de enregie lipseşte; acest regim poartă denumirea de regim liber. Curenţii şi tensiunile obţinute ca rezultat la soluţia ecuaţiei

diferenţiale omogene se determină numai cu aplicarea parametrilor circuitului. Mărimile, care intervin în expresia soluţiei generale sunt numite mărimi libere.

Suma mărimilor forţate şi libere determină mărimile tranzitorii, adică mărimile în decursul procesului tranzitoriu:

$$i(t) = i_f(t) + i_l(t), \tag{1.2}$$

$$u(t) = u_f(t) + u_l(t). \tag{1.3}$$

Calculul soluţiei generale în regim tranzitoriu presupune deci următoarele operaţii. Se determină expresia componentei libere, (în care intervin constante arbitrare, încă nedeterminate), şi expresia componentei permanente (complet determinată). Constantele de integrare se determină ţinând seama de condiţiile iniţiale ale circuitului considerat. Această metodă de rezolvare a circuitelor electrice în regim tranzitoriu se numeşte metoda integrării directe. Ea se aplică în cazul unor circuite relativ simple.

Aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în valori instantanee pentru rezolvarea circuitelor electrice conduce, în general, la un sistem de ecuaţii diferenţiale. Soluţia generală conţine constantele de integrare, ce pot fi determinate cu ajutorul condiţiilor iniţiale, care reies din legile comutaţiei.

Există două legi ale comutaţiei. Conform primei legi a comutaţiei, curentul într-o ramură ce conţine un element inductiv (sau fluxul magnetic al acestui element inductiv) nu poate să se modifice brusc, adică în primul moment de după comutaţie curentul prin acest element îşi păstrează valoarea pe care a avut-o în momentul anterior comutaţiei:

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+). \tag{1.4}$$

Conform legii a doua a comutaţiei, tensiunea (sarcina electrică) la bornele condensatorului nu se poate modifica brusc, adică în primul moment de după comutaţie, tensiunea (sarcina electrică) de la bornele condensatorului îşi păstrează valoarea pe care a avut-o în momentul anterior comutaţiei:

$$U_C(0_-) = U_C(0) = U_C(0_+). \tag{1.5}$$

Conform legilor comutaţiei urmează, că pentru a determina condiţiile iniţiale independente trebuie rezolvat circuitul electric considerând schema anterioară comutaţiei.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare neomogene în matematică se pot aplica diferite alte metode, printre care: metoda clasică, metoda operaţională, integrala Duhamel, metoda spectrală.

## 1.2. Calculul proceselor tranzitorii în circuite electrice liniare prin metoda clasică

Algoritmul de calcul în cazul metodei clasice.

Metoda clasică constă în următoarea:

a) Se scriu ecuaţiile integro-diferenţiale pentru circuitul dat aplicând teoremele lui Kirchhoff în valori instantanee;

b) Se rezolvă sistemul de ecuaţii explicând una dintre mărimile necunoscute (curentul sau tensiunea). Astfel, se obţine o ecuaţie diferenţială neomogenă, în care intervine mărimea necunoscută şi derivatele ei;

c) Se rezolvă ecuaţia diferenţială liniară neomogenă.

**Exemplul 1**

Se dă circuitul din fig. 1.1. Se cunosc f.e.m. E şi parametrii circuitului. Se cere să se determine curentul din circuit în timpul procesului tranzitoriu la închiderea întrerupătorului K.

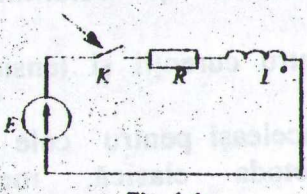


Fig. 1.1

Rezolvare:

1) Pentru schema electrică după comutaţie se scrie ecuaţia diferenţială a circuitului aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt}+i\cdot r=E. \qquad (1.6)$$

2) Se rezolvă ecuaţia (1.6):

a) Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $i=i_{/}=const$;

$$L\frac{di_{/}}{dt}+i_{/}\cdot r=E, \qquad (1)$$

de unde : $$i_f = \frac{E}{r}. \qquad (2)$$

b) soluţia generală a ecuaţiei omogene : $i = i_l$ ; $E=0$ ;

$$L\frac{di_l}{dt} + i_l \cdot r = 0 \quad \text{sau} \quad \int\frac{di_l}{di_l} = -\int\frac{r}{L}dt \qquad (3)$$

de unde integrala de la ambele părţi ne dă :

$$\ln i_l = -\frac{r}{L}t - \ln C\,,\ \ln i_l C = -\frac{r}{L}t\,,$$

şi deci avem : $$i_l = \frac{1}{C}e^{-\frac{r}{L}t}. \qquad (4)$$

Se notează $p = -\frac{r}{L}$ - rădăcina ecuaţiei caracteristice depinde de structura şi parametrii schemei; se măsoară în $s^{-1}$;

$A = \frac{1}{C}$ - constantă, a cărei valoare se determină din condiţiile iniţiale.

Astfel : $$i_l = Ae^{pt}. \qquad (5)$$

c) Curentul din circuit la procesul tranzitoriu :

$$i = i_f + i_l = \frac{E}{r} + Ae^{pt}. \qquad (1.7)$$

Se determină constanta "A". În conformitate cu prima lege a comutaţiei, curentul în circuit satisface condiţiile:

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+) = 0.$$

Punând condiţia t = 0 din ecuaţia (1.7) se obţine relaţia :

$$i(0) = \frac{E}{r} + A\,,\ \text{iar}\ i(0) = 0\,,$$

de unde : $$A = -\frac{E}{r}.$$

Astfel , se obţine expresia curentului din circuit în funcţie

de timp : $$i(t)=\frac{E}{r}-\frac{E}{r}e^{pt}=\frac{E}{r}\left(1-e^{pt}\right). \qquad (1.8)$$

unde: $\frac{E}{r}$ - soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene;

$-\frac{E}{r}e^{pt}$ - soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene.

Verificarea ecuaţiei diferenţiale (1.6).

Introducând valoarea funcţiei *i(t)* din (1.8) se obţine :

$$L\frac{d}{dt}\left[\frac{E}{r}\left(1-e^{pt}\right)\right]+r\frac{E}{r}\left(1-e^{pt}\right)=E,$$

$$-L\cdot p\frac{E}{r}e^{pt}-E\cdot e^{pt}+E=E\ ,$$

$$-L\cdot\left(-\frac{r}{L}\cdot\frac{E}{r}\right)e^{pt}-E\cdot e^{pt}+E=E.$$

Deci : $E=E.$

Se poate observa că funcţia din (1.8) este într-adevăr soluţia ecuaţiei (1.6).

Curentul din circuit este suma a două componente, una dintre care este componenta forţată , iar a doua - componenta liberă, adică : $$i=i_f+i_l. \qquad (1.9)$$

unde $i_f$ - componenta forţată a curentului (tensiunii). reprezintă fizic componenta ce variază cu aceiaşi frecvenţă cu f.e.m. din circuit. Dacă în schemă există o sursă de f.e.m. de curent continuu, la calculul acestei componente, se aplică metodele pentru circuitele de curent continuu. În acest caz se ţine seama de faptul că prin condensator curentul continuu nu trece. Componenta forţată a curentului prin condensator este nulă.

Dacă în schemă există o sursă de f.e.m. alternativă sinusoidală, determinarea componentei forţate se face prin

aplicarea metodei simbolice ; $i_l = -\frac{E}{r}e^{pt}$ - componenta liberă a curentului, care amortizează în timp după o lege exponenţială. Cucreşterea timpului factorul se micşorează repede. Această componentă se numeşte liberă deoarece componenta este soluţia ecuaţiei cu f.e.m. $E = 0$ (ecuaţia diferenţială omogenă fără coeficient liber).

Din trei componente ale curentului (total, forţat, liber) importanţă are curentul total. Acest curent este curentul ce parcurge elementul dat în procesul tranzitoriu şi poate fi măsurat şi înregistrat pe osciloscop. Componentele $i_f$ şi $i_l$ ale curenţilor (tensiunilor) la procesul tranzitoriu joacă un rol auxiliar, adică sunt componente de calcul.

### 1.3. Metoda generală de calcul a proceselor tranzitorii în circuitele electrice liniare

Calculul proceselor tranzitorii în circuitele electrice liniare constă din următoarele operaţii de bază:

1) Alegerea direcţiilor pozitive ale curenţilor din ramurile circuitului;

2) Deteminarea mărimilor curenţilor şi tensiunilor înainte de comutaţie;

3) Scrierea ecuaţiei caracteristice şi determinarea rădăcinilor ei;

4) Determinarea expresiilor pentru curenţii şi tensiunile necunoscute în funcţie de timp.

Primele trei operaţii sunt aceleaşi pentru cele trei metode de calcul şi anume: metoda clasică, metoda operaţională şi metoda integralei Duhamel. Printre metodele cele mai aplicate sunt: metoda clasică şi operaţională.

## 1.4. Caz general de calcul prin metoda clasică a proceselor tranzitorii (exemplu 2)

Se aplică metoda clasică de calcul a proceselor tranzitorii pentru un circuit ramificat cu schema reprezentată în fig.1.2 la care se cunosc: f.e.m., parametrii elementelor din circuit ($r_1$, $L_2$, $C_1$, $C_2$, $r_2$, $r_3$). Se determină curenții din ramurile circuitului pentru procesul tranzitoriu la conectarea cheii "K".

Curenții din circuit, în caz general, pot fi exprimați în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i_{1f} + i_{1l}, \\ i_2 &= i_{2f} + i_{2l}, \\ i_3 &= i_{3f} + i_{3l}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

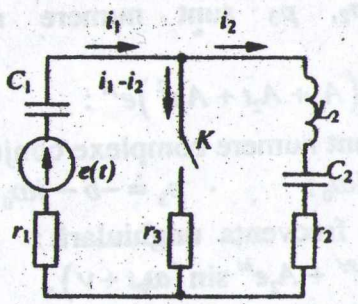


Fig. 1.2.

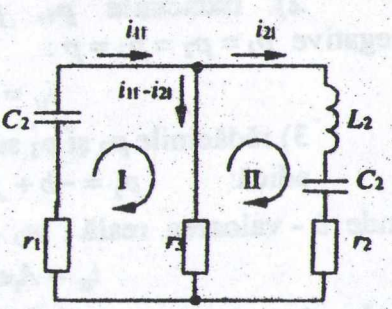


Fig. 1.3

După cum se poate observa fiecare curent conține două componente.

Componentele permanente ale curenților se determină printr-o metodă cunoscută de calcul a circuitelor de curent continuu (dacă $E$ = const) sau prin metoda simbolică (dacă f.e.m. este sinusoidală), considerând schema după comutație.

Dificultatea metodei clasice constă în determinarea componentelor libere ale curenților. Pentru aceasta se scriu ecuațiile integro-diferențiale conform teoremei a doua a lui Kirchhoff (schema după comutație, fig 1.3):

$$\begin{cases} (r_1 + r_3)\cdot i_{1l} + \dfrac{1}{C}\int i_{1l}dt - r_3 \cdot i_{2l} = 0 \\ -r_3 \cdot i_{1l} + (r_2 + r_3)\cdot i_{2l} + L_2 \cdot \dfrac{di_{2l}}{dt} + \dfrac{1}{C}\int i_{2l}dt = 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

Se introduc notaţiile următoare:

$$r_{11} = r_1 + r_3; \qquad C_{11} = C_1;$$
$$r_{12} = r_{21} = -r_3; \qquad C_{22} = C_2;$$
$$r_{22} = r_2 + r_3; \qquad L_{22} = L_2,$$

ce reprezintă rezistenţele, capacităţile şi inductanţele contururilor (buclelor). Cu notaţiile adoptate, se scriu expresiile:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}i_{1l} + \frac{1}{C_{11}}\int i_{1l}dt + r_{12}i_{2l} = 0 \\ r_{21}i_{1l} + r_{22}i_{2l} + L_2\frac{di_{2l}}{dt} + \frac{1}{C_{22}}\int i_{2l}dt = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

Presupunând, că : $i_{1l} = A_1 e^{pt}$ ; $i_{2l} = A_2 e^{pt}$ , iar

$$\frac{di_{1l}}{dt} = pA_1e^{pt} = pi_{1l}; \frac{di_{2l}}{dt} = pi_{2l}; \int i_{1l}dt = \frac{1}{p}A_1e^{pt} = \frac{i_{1l}}{p}; \int i_{2l}dt = \frac{i_{2l}}{p},$$

şi introducând în sistemul (1.12), rezultă:

$$\left.\begin{aligned} \left(r_{11} + \frac{1}{pC_{11}}\right)i_{1l} + r_{12}i_{2l} = 0 \\ r_{12}i_{1l} + \left(r_{22} + \frac{1}{pC_{22}} + pL_{22}\right)i_{2l} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

Ecuaţiile integro-diferenţiale din sistemul (1.12) cu necunoscutele $i_{1l}$, $i_{2l}$, $i_{3l}$ s-au transformat în ecuaţiile algebrice (1.13) cu aceleaşi necunoscute. O asemenea transformare se numeşte algebrizarea sistemului de ecuaţii integro-diferenţiale.

Sistemul obţinut conţine două ecuaţii omogene cu soluţii nenule, dacă determinantul sistemului este egal cu zero :

$$\Delta(p)=0. \quad (1.14)$$



M36569

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} r_{11}+\dfrac{1}{pC_{11}} & r_{12} \\ r_{11} & r_{22}+pL_{22}+\dfrac{1}{pC_{22}} \end{vmatrix}.$$

Soluția identică nulă ($i_{1l}=i_{2l}=0$) semnifică că lipsește procesul liber, ce poate să aibă loc numai în circuitele descrise printr-o ecuație diferențială de gradul întâi.

Din sistemul (1.13) reiese că $p$ este rădăcina ecuației (1.14) care reprezintă ecuația caracteristică pentru sistemul dat de ecuații; în cazul de față ecuația diferențială este de gradul trei, ce corespunde numărului de elemente de înmagazinare a energiei.

Rezolvarea ecuației $\Delta(p) = 0$ se efectuează după regulile algebrei. Considerăm că rădăcinile $p_1$, $p_2$, $p_3$ sunt (în continuare) cunoscute.

Determinantul $\Delta(p)$ poate fi alcătuit în felul următor (caz general):

Coeficienții mărimilor $i_{1l}$, $i_{2l}$ reprezintă impedanțele totale ale acestor contururi prin calculul regimului staționar cu metoda simbolică, dacă înlocuim $j\omega$ prin $p$. Considerăm ca exemplu impedanța conturului doi :

$$\underline{Z}_{22}(j\omega)=r_{22}+j\omega L_{22}+\frac{1}{j\omega C_{22}}$$

în rezultatul înlocuirii avem:

$$\underline{Z}_{22}(p)=r_{22}+pL_{22}+\frac{1}{pC_{22}}.$$

Prin urmare determinantul sistemului poate fi alcătuit asemănător ca la metoda de calcul a curenților de contururi.

Scrierea ecuației caracteristice pentru determinarea rădăcinii "$p$" se poate efectua și pe o cale mai simplă.

Se alcătuiește expresia impedanței de intrare a circuitului de curent alternativ $\underline{Z}(j\omega)$, apoi înlocuind $j\omega$ prin $p$ se obține $Z(p)$, și

această expresie se egalează cu zero, adică $Z(p) = 0$. Ecuaţia $Z(p)$ va coincide întotdeauna cu ecuaţia caracteristică.

Pentru exemplul considerat se poate scrie:

$$Z(p) = r_2 + \frac{1}{pC_2} + pL_2 + \frac{r_3 \cdot \left(r_1 + \frac{1}{pC_1}\right)}{r_3 + r_1 + \frac{1}{pC_1}}.$$

Determinând rădăcinile caracteristice ale sistemului de ecuaţii, rezultă expresiile curenţilor de contur.

Considerăm câteva cazuri:

1) rădăcinile $p_1$, $p_2$, $p_3$ sunt numere reale diferite şi negative:

$$i_{11} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t};$$

2) rădăcinile $p_1$, $p_2$, $p_3$ sunt numere reale egale negative $p_1 = p_2 = p_3 = p$:

$$i_{11} = \left(A_1 + A_2 t + A_3 t^2\right) e^{pt};$$

3) rădăcinile $p_2$ şi $p_3$ sunt numere complexe conjugate, adică: $p_2 = -b + j\omega_0$; $p_3 = -b - j\omega_0$,

unde $b$ - valoarea reală, $\omega_0$ - frecvenţa unghiulară:

$$i_{11} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{bt} \sin\left(\omega_0 t + \nu\right),$$

unde $A_1$, $A_2$, $\nu$ sunt constante, ce trebuie determinate din condiţiile iniţiale.

Ordinea de calcul nu depinde de felul rădăcinilor ecuaţiei caracteristice. Se consideră cazul pentru care rădăcinile sunt numere egale şi diferite. Se foloseşte schema din fig.1.2. Curentul din prima latură are expresia:

$$i_1 = i_{1f} + i_{11} = i_{1f} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}. \quad (1.15)$$

În continuare se arată cum se determină constantele $A_1$, $A_2$, $A_3$. Pentru aceasta se derivează de două ori expresia (1.15) şi se pune condiţia $t = 0$.

Primim:

$$\left.\begin{aligned} i_1(0) &= i_{1f}(0) + A_1 + A_2 + A_3 \\ i_1'(0) &= i_{1f}'(0) + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 \\ i_1''(0) &= i_{1f}''(0) + p_1^2 A_1 + p_2^2 A_2 + p_3^2 A_3 \end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

unde $i_{1f}(0)$, $i'_{1f}(0)$, $i''_{1f}(0)$ şi rădăcinile $p_1$, $p_2$, $p_3$ sunt cunoscute. Pentru a determina $A_1$, $A_2$, $A_3$ trebuie cunoscute mărimile $i_1(0)$, $i'_1(0)$, $i''_1(0)$.

Alcătuim ecuaţiile necesare folosind teoremele lui Kirchhoff (schema după comutaţie, fig. 1.2):

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ r_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + r_3 i_3 &= e_1 \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt + r_3 i_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.17)$$

În sistemul (1.17) mărimile $i_2(0)$; $U_{C_1}(0)$; $U_{C_2}(0)$ pentru $t = 0$ sunt considerate cunoscute conform legilor comutaţiei. Sistemul de ecuaţii (1.17) la t = 0 sub forma nouă :

$$\left.\begin{aligned} i_1(0) &= i_2(0) + i_3(0) \\ r_1 i_1(0) + U_{C_1}(0) + r_3 i_2(0) &= e_1(0) \\ r_2 i_2(0) + L_2 \frac{di_2}{dt}\Big|_{t=0} + U_{C_2}(0) - r_3 i_3(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.18)$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului (1.18) se determină mărimile $i_1(0)$ şi $i_3(0)$. Se derivează apoi primele două ecuaţii ale sistemului (1.17), iar a treia ecuaţie rămâne neschimbată ($t = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{di_1}{dt}\Big(_{t=0} = \frac{di_2}{dt}\Big(_{t=0} + \frac{di_2}{dt}\Big(_{t=0} \\ &r_1 \cdot \frac{di_1}{dt}\Big(_{t=0} + \frac{i_1(0)}{e_1} + r_3 \cdot \frac{di_3}{dt}\Big(_{t=0} = \frac{de_1}{dt}\Big(_{t=0} \\ &r_2 i_2(0) + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}\Big(_{t=0} + U_{C_2}(0) - r_3 i_3(0) = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (1.19)$$

Considerând că mărimile $i_1(0), i_2(0), i_3(0), e_1(0), U_{C_2}(0)$ sunt cunoscute se determină mărimea $i_2'(0)$ din ecuația a treia, iar $i_1'(0)$ și $i_3'(0)$ din primele două ecuații.

Derivând încă o dată sistemul (1.19) se obține următorul sistem de ecuații valabil la $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 i_1}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2 i_2}{dt^2}\Big|_{t=0} + \frac{d^2 i_2}{dt^2}\Big|_{t=0} \\ &r_1 \cdot \frac{d^2 i_1}{dt^2}\Big|_{t=0} + \frac{1}{C}\frac{di_1}{dt}\Big|_{t=0} + r_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2 e_1}{dt^2}\Big|_{t=0} \\ &r_2 \frac{di_2}{dt}\Big|_{t=0} + L_2 \cdot \frac{d^2 i_2}{dt^2}\Big|_{t=0} + \frac{i_2(0)}{C_2} - r_3 \frac{di_3}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

Considerând cunoscute $i_2(0), i_1'(0), i_2'(0), i_3'(0), e_1''(0)$ se determină $i_1''(0), i_2''(0), i_3''(0)$ și înlocuind în sistemul (1.16) se determină $A_1$, $A_2$, $A_3$.

## Exemplu

Se dă schema din fig. 1.4 în care: $r_1 = 40\ \Omega$; $r_2 = r_3 = 160\ \Omega$; $L = 2\ H$; $E = 120\ V$. Se cere să se determine mărimile: $i_1(t)$, $i_3(t)$, $U_L(t)$ în funcție de timp.

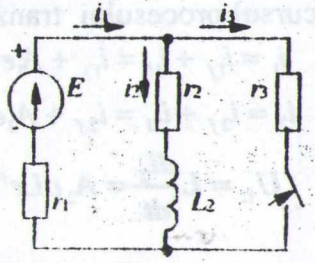


Fig. 1.4

**Rezolvare:** Rezolvarea problemei presupune parcurgerea următoarelor etape:

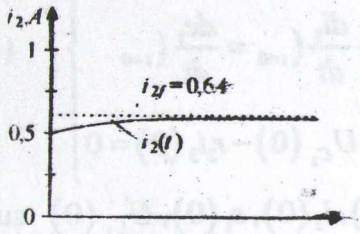



Fig 1.5,a

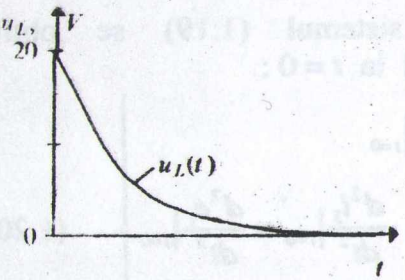



Fig1.5,b

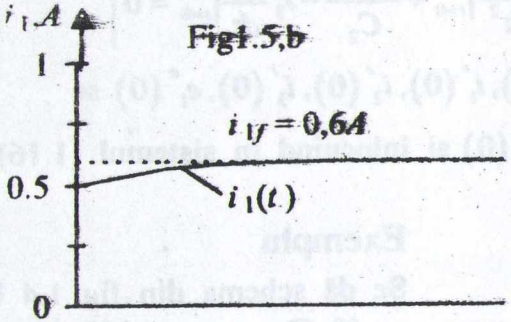



Fig1.5,c

1) Alegerea direcţiilor pozitive ale curenţilor din laturile circuitului.

2) Determinarea curentului în bobină anterior comutaţiei (până la deschiderea întrerupătorului $K$).

$$i_1=\frac{E}{r_1+\frac{r_2\cdot r_3}{r_2+r_3}}=\frac{120}{80+40}=1\ A;$$

$$i_2=\frac{E-i_1\cdot r_1}{r_2}=\frac{120-1\cdot 40}{160}=0,5\ A.$$

Conform primei legi de comutaţie :

$$i_2(0_-)=i_2(0)=i_2(0_+)=0,5,\ A.$$

3) Scrierea ecuaţiei caracteristice şi determinarea rădăcinilor acesteia (schema după comutaţie).

$$\underline{Z}(j\omega)=r_1+r_2+j\omega L.$$

sau $\underline{Z}(p)=r_1+r_2+pL=0$,

de unde :

$$p=-\frac{r_1+r_2}{4}=-\frac{200}{2}=-100\ s^{-1}.$$

4) Scrierea expresiilor în decursul procesului tranzitoriu:

$$i_1=i_{1f}+i_{1l}=i_{1f}+A_1e^{pt},$$

$$i_2=i_{2f}+i_{2l}=i_{2f}+A_2e^{pt},.$$

$$U_L=L\frac{di_2}{dt}=A_2pLe^{pt}.$$

Componentele permanente ale curenţilor au valorile:

$$i_{1f} = i_{2f} = \frac{E}{r_1 + r_2} = 0{,}6 \ A.$$

Componentele libere ale curenţilor au valorile:

$$i_{1l}(0) = i_{2l}(0), \quad i_{2l}(0) = i_{2l}(0) - i_f(0) = 0{,}5 - 0{,}6 = -0{,}1 \ A,$$

deci : $$i_{2l}(0) = A, \ A = 0{,}1.$$

Astfel, rezultă: $i_1(t) = i_2(t) = 0{,}6 - 0{,}1e^{-100t}, A$

$$U_L(t) = L\frac{di_2}{dt} = 20e^{-100t}, V$$

Graficile acestor funcţii sunt reprezentate în fig. 1.5.

## 1.5. Conectarea circuitului cu r, L legate în serie la o sursa de curent continuu

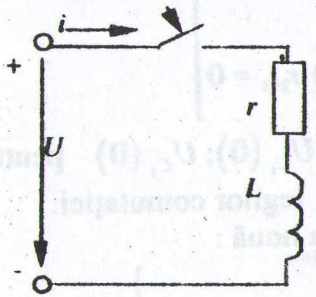



Fig. 1.6

Fie că este dat circuitul electric cu elementele $r$, $L$ legate în serie (fig. 1.6). La conectarea acestui circuit la tensiunea de curent continuu are loc procesul tranzitoriu.

Curentul şi tensiunea la bornele inductanţei au expresiile următoare:

$$i(t) = i_f + i_l = i_f + Ae^{pt}, \quad (1.21)$$

$$U_L(t) = L\frac{di}{dt} = ApLe^{pt} \quad (1.22)$$

Conform primei legi de comutaţie, avem :

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+).$$

Atunci : $$A = i(0) - i_f = -\frac{U}{r}.$$

Astfel, se obţine: $$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r}e^{-\frac{t}{L}r}, \quad (1.23)$$

$$U_L(t) = Ue^{-\frac{r}{L}t} \quad . \qquad (1.24)$$

Din analiza ecuațiilor (1.23) și (1.24) se poate face următoarea concluzie:

a) Curentul în circuit nu se stabilește instantaneu. Este nevoie de un timp (teoretic infinit) pentru ca curentul în circuit să devină egal cu $U/r$. Curentul crește cu atât mai încet cu cât e mai mare constanta de timp $\tau = \frac{1}{(p(} \left( p = -\frac{r}{L} \right)$.

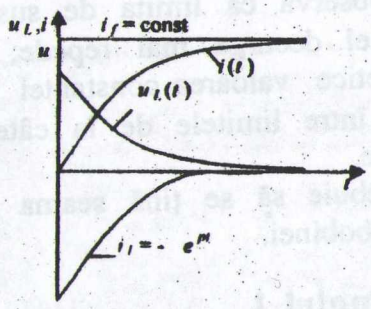



Fig. 1.7

b) Tensiunea la bornele inductanței crește brusc, deoarece până la introducerea sursei $U_L = 0$, iar în momentul comutației $U_L = U$, adică tensiunea în procesul tranzitoriu se schimbă brusc.

c) În momentul comutației o parte din energia sursei merge la mărirea câmpului magnetic al bobinei, iar altă parte se transformă în căldură în rezistența "r".

d) Graficile funcțiilor $i(t)$ și $U_L(t)$ sunt prezentate în fig.1.7.

## 1.6. Scurtcircuitarea ramurii cu r, L

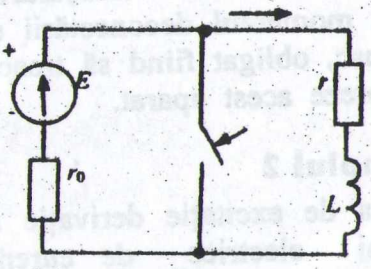



Fig.1.8

Se consideră circuitul din fig.1.8. O bobină reală este scurtcircuitată la un moment dat. Se închide întrerupătorul $K_2$. Se cere să se calculeze variațiile în timp ale tensiunilor și curenților. Curentul înainte de comutație are expresia:

$$i = \frac{E}{r_0 + r}.$$

Curentul în bobină în timpul procesului tranzitoriu:

$$i = i_f + i_l . \qquad (1.25)$$

Componenta forţată a curentului după comutaţie este egală cu zero: $i_f = 0$ şi $i = i_l$. (1.26)

Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul care conţine bobina reală, se poate scrie:

$$L\frac{di_l}{dt} + ri_l = 0 \qquad (1.27)$$

Rezolvarea ecuaţiei (1.27) corespunde expresiei:

$$i_l = Ae^{-\frac{r}{L}t} . \qquad (1.28)$$

Pentru $t = 0$: $i_l(0) = A = i(0) = \frac{E}{r_0 + r}$. (1.29)

Astfel , se obţine:

$$i(t) = \frac{E}{r_0 + r}e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{E}{r_0 + r}e^{pt} = \frac{E}{r_0 + r}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} . \qquad (1.30)$$

Mărimea $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}$, se măsoară în secunde, se numeşte constanta de timp a circuitului $r$, $L$ şi reprezintă durata în decursul căreia valoarea componentei liberă a curentului se micşorează de $e = 2{,}7184$ ori în comparaţie cu valoarea sa pentru $t = 0$, $i_l(0)$. Într-adevăr:

$$i_l(\tau) = i_l(0)e^{-1} = \frac{i_l(0)}{e} = \frac{A}{e} . \qquad (1.31)$$

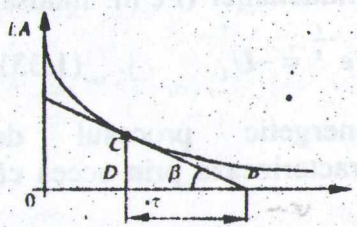


Fig 1.9

Constanta de timp $\tau$ poate fi determinată , de asemenea , pe cale grafică (fig. 1.9).

În fig. 1.9 este reprezentată variaţia în timp a curentului $i(t)$. Pentru a determina constanta de timp " $\tau$ " pe cale grafică se duce

tangenta la curba $i(t)$ într-un punct oarecare "$C$". Mărimea subtangentei "$BD$" corespunde constantei "$\tau$" pentru circuitul dat. Variaţiile exponenţiale se bucură de proprietatea de a conserva valoarea subtangentei. Rezultă, procedeul "$C$" poate fi oarecare. Subtangenta "$BD$" poate fi determinată din $\Delta CBD$.

$$BD = CD \cdot ctg\,\beta = \frac{i_l}{tg\,\beta} = \frac{i_l}{-\frac{di_l}{dt}} = \frac{i_l}{\frac{i_l}{\tau}} = \tau .$$

Constanta de timp este egală numeric cu lungimea subtangentei $BD$. Mărimea inversă constantei de timp este dublul coeficientului de atenuare (amortizare):

$$\alpha = \frac{1}{\tau} = \frac{r}{L}.$$

Componenta liberă a curentului se atenuează cu atât mai încet şi regimul nou forţat se stabileşte cu atât mai greu cu cât este mai mare constanta de timp "$\tau$" sau cu cât este mai mic coeficientul "$\alpha$", adică cu cât este mai mare inductanţa "$L$" şi este mai mică rezistenţa "$r$".

Constanta de integrare $A$ se determină din condiţia iniţială :

$$i(0) = i_l(0) = \frac{E}{r_0 + r},$$

şi este egală cu: $A = \frac{E}{r_0 + r}$.

Astfel, expresia curentului este:

$$i(t) = i_l(t) = \frac{E}{r_0 + r} e \qquad (1.32)$$

Căderea de tensiune la bornele inductanţei (t.e.m. indusă) are expresia

$$e_L(t) = -L\frac{di}{dt} = \frac{E \cdot r}{r_0 + r} e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_L . \qquad (1.33)$$

Din punct de vedere energetic procesul de scurcircuitare a circuitului cu $r$, $L$ se caracterizează prin aceea că

toată energia înmagazinată în bobină $W^{(m)} = \frac{L \cdot i^2(0)}{2}$ se transformă în căldură în timpul procesului tranzitoriu :

$$\int_0^\infty i^2 r dt = i^2(0) \cdot r \int_0^\infty e^{-2\frac{r}{L}t} dt = \frac{Li^2(0)}{2}. \qquad (1.34)$$

Procesul tranzitoriu decurge teoretic într-un interval de timp infinit de lung. Se poate observa că limita de sus a integralei este luată "∞". Practic el decurge mai repede; în majoritatea circuitelor electroenergetice valoarea constantei de timp $\tau$ a circuitului $r$, $L$ se află între limitele de la câteva microsecunde până la câteva secunde.

În practica electrotehnică trebuie să se țină seama de procesul tranzitoriu la scurtcircuitarea bobinei.

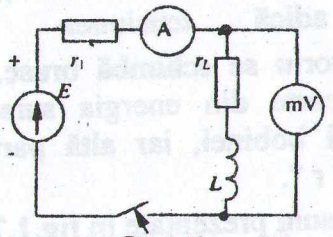


Fig. 1.10

**Exemplul 1**

De exemplu, la măsurarea rezistențelor înfășurărilor unui transformator (fig.1.10). Tensiunea pe bobină se măsoară cu un milivoltmetru mV. Dacă după efectuarea măsurărilor, transformatorul va fi deconectat de la sursa de tensiune, atunci curentul va trece prin ramura care conține milivoltmetru mV. Deoarece curentul din înfășurarea transformatorului este foarte mare în momentul deconectării și acest curent nu se poate schimba brusc, obligat fiind să treacă prin milivoltmetru, el poate să deterioreze acest aparat.

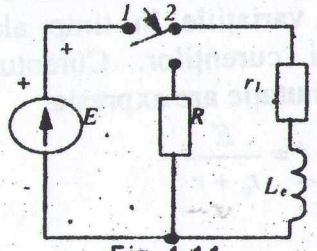


Fig. 1.11

**Exemplul 2**

Bobina de excitație derivație a unei mașini electrice de curent continuu de putere mare nu este deconectată de la sursa de tensiune

(în caz că trebuie să se excludă repede excitaţia), ce se scurtcircuitează printr-o rezistenţă de descărcare în care energia câmpului magnetic înmagazinată în bobină se transformă în căldura (fig. 1.11). Deconectarea circuitului cu bobina de excitaţie ar aduce la micşorarea bruscă a curentului până la zero, ceea ce ar determina o creştere bruscă a f.e.m. induse, deoarece $\frac{di}{dt}$ va fi foarte mare $\left(e_L = -L_{ex}\frac{di}{dt}\right)$. Bobina de excitaţie are inductanţa $L_{ex}$ de valoare mare. Această f.e.m. indusă ar putea determina străpungerea izolaţiei maşinii.

### 1.7. Conectarea circuitului cu r, L la o sursă de curent alternativ

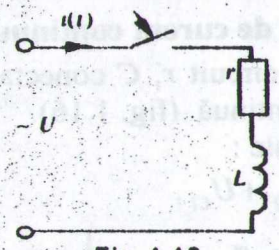


Fig. 1.12

Se consideră schema din fig. 1.12 conţinând un circuit r, L conectat la o sursă cu tensiunea sinusoidală.

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi). \qquad (1.35)$$

Curentul tranzitoriu din circuit se determină ca sumă:

$$i = i_f + i_l, \qquad (1.36)$$

unde : $i_f = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi)}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi)$; $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$;

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{r}; \quad i_l = Ae^{pt}; \quad p = -\frac{r}{L}.$$

Astfel, se obţine:

$$i = i_f + i_l = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{pt}. \qquad (1.37)$$

Pentru determinarea constantei de integrare se folosesc condiţiile iniţale: $i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+) = 0$;

$$i_f(0) = \frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi).$$

Deci : $$i_l(0)=i_L(0)-i_f(0)=-\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi),$$

şi $$i_l(0)=A=-\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi).$$

Expresia curentului este:

$$i_l(t)=\frac{U_m}{Z}\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\frac{U_m}{Z}\sin(\psi-\varphi)e^{pt}. \quad (1.38)$$

Tensiunea la bornele inductanţei are expresia:

$$U_L=L\frac{di}{dt}=U_m\left[\sin\varphi\sin\left(\omega t+\psi-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos\varphi\sin(\psi-\varphi)e^{pt}. \quad (1.39)$$

Verificarea rezultatelor obţinute se face introducând în expresiile (1.38) şi (1.39), $t=0$:

$$i_L(0)=0;\ U_L(0)=U_m\sin\psi.$$

În realitate, în momentul conectării sursei de tensiune, tensiunea se aplică brusc pe inductanţă, deoarece tensiunea pe rezistenţă este egală cu zero.

Variaţia în timp a curentului $i(t)$ este reprezentată în fig. 1.13. Din grafic reiese că după amortizarea componentei libere curentul tranzitoriu tinde către curentul permanent. În funcţie

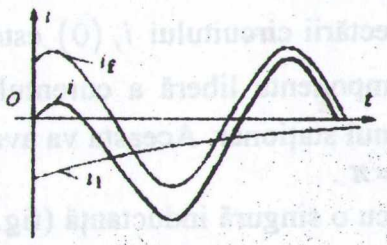



Fig. 1.13

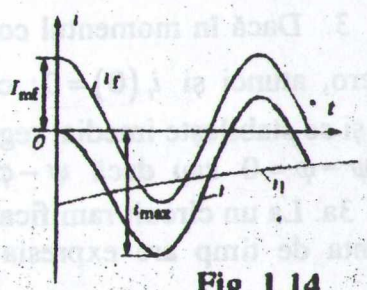



Fig. 1.14

de valoarea unghiului "ψ" după un interval de timp $\frac{1}{4}T+\frac{3}{4}T$ de la conectarea sursei, curentul poate să atingă o valoare ce depăşeşte amplitudinea componentei permanente. Cea mai mare valoare posibilă a curentului corespunde cazului când la

conectarea circuitului tensiunea trece prin valoare maximă, adică $\left(\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă constanta de timp este de valoare foarte mare $\left(r = 0, \tau \to \infty \text{ şi } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ componenta liberă a curentului se atenuează foarte încet.

În cazul când $\psi \approx \pi$, tensiunea aplicată în momentul comutaţiei trebuie să treacă prin zero. Curba curentului pentru $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ şi pentru valori mari ale lui $\tau$ este prezentată în fig.1.14.

După o jumătate de perioadă (T/2), de la conectarea circuitului, curentul atinge o valoare aproape dublă faţă de amplitudinea sa.

Concluzie:

1. La conectarea circuitului cu $r$, $L$ la o sursă de tensiune sinusoidală, curentul tranzitoriu poate atinge valori ce nu depăşesc valoarea dublă de la amplitudinea componentei permanente.

2. Valoarea iniţială a componentei libere a curentului este egală cu valoarea iniţială a componentei permanente, dar de semn opus.

3. Dacă în momentul conectării circuitului $i_l(0)$ este egal cu zero, atunci şi $i_l(0) = 0$; componenta liberă a curentului nu există şi se stabileşte imediat regimul staţionar. Aceasta va avea loc dacă $\psi - \varphi = 0$ sau dacă $\psi - \varphi = \pi$.

3a. La un circuit ramificat cu o singură inductanţă (fig.1.15) constanta de timp are expresia :

$$\tau = \frac{L}{r + r_{int}},$$

unde :

$$r_{int} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}.$$

Curentul tranzitoriu : $i_L(t) = i_{Lf} + i_{Ll} = i_{Lf} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,

unde : $A = i_{Ll}(0) = i_L(0) - i_{lf}(0)$.

Deci : $i_L(t) = i_{Lf} + \left[i_L(0) - i_{Lf}(0)\right] Ae^{-\frac{t}{\tau}}, A$ (1.40)

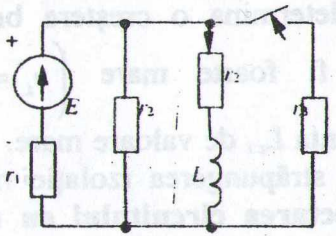



Fig. 1.15

## 1.8. Circuit r,C conectat la o sursa de curent continuu

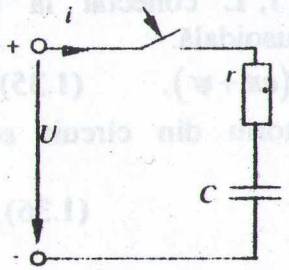



Fig. 1.16

Se consideră un circuit $r$, $C$ conectat la o sursă de tensiune continuă (fig. 1.16). Tensiunea tranzitorie este :

$$U_C(t) = U_{Cf} + U_{Cl},$$

unde : $U_{Cf} = U$, $U_{Cl} = Ae^{pt}$; $p = -\dfrac{1}{rC}$.

Constanta de integrare rezultă din condiții inițiale : $A = U_C(0) - U_{Cf}(0) = U_{Cl}(0)$,

unde : $U_C(0) = 0$ conform legii de comutație și $U_{Cf}(0) = U$.

Deci : $A = -U$ și $U_C(t) = U\left(1 - e^{pt}\right)$, (1.41)

Curentul tranzitoriu în circuit (în condensator) are expresia :

$$i(t) = C\frac{dU_C}{dt} = \frac{U}{r}e^{pt} = \frac{U}{r}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (1.42)$$

În fig. 1.17 sunt reprezentate curbele $U_C(t), i(t)$

**Concluzii:**

1. Tensiunea la bornele condensatorului şi curentul în circuit nu se stabilesc momentan.

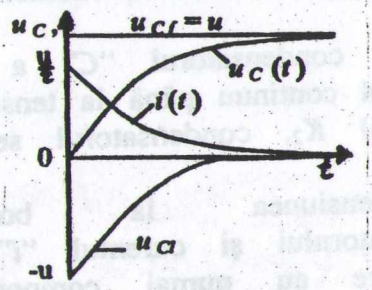



Fig. 1.17

2. Tensiunea creşte şi curentul descreşte cu atât mai încet cu cât este mai mare constanta de timp a circuitului "$\tau$", adică cu cât mai încet se atenuează componenta liberă a tensiunii $U_{Cl}$.

3. Procesul de încărcare şi descărcare a unui condensator printr-o rezistenţă are o însemnătate practică la calculul regimurilor tranzitorii în circuitele utilizate în automatică, telemecanică, în circuitele electronice şi de telecomunicaţie.

## 1.9. Circuitul r, C conectat la o sursă de curent alternativ.

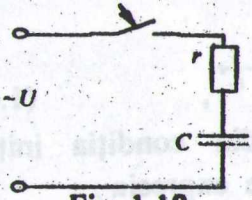



Fig. 1.18

Se consideră un circuit $r,C$ ce se conectează la o sursă de tensiune sinusoidală (fig. 1.18). $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. (1.43)

Tensiunea tranzitorie are expresia generală: $u_C(t) = u_{Cf} + u_{Ca}$, (1.44)

unde : $U_{Cf} = \dfrac{U_m}{Z\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$Z = \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\varphi = arctg\left(-\dfrac{1}{r\omega C}\right)$;

$U_{Cl} = Ae^{pt}$; $p = -\dfrac{1}{rC}$.

Constanta de integrare A se determină din condiția inițială:

$$U_C(0_-)=U_C(0)=U_C(0_+)=0.$$

Rezultă:

$$U_{Cl}(0)=U_C(0)-U_{Cf}(0)=0-\frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$A=U_{Cl}(0)=-\frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Astfel tensiunea tranzitorie are expresia:

$$U_C(t)=\frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\omega t+\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{U_m}{Z\omega C}\sin\left(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \quad (1.45)$$

Curentul tranzitoriu are expresia:

$$i(t)=C\frac{dU_C}{dt}=\frac{U_m}{r}\left[\cos\varphi\cdot\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\sin\varphi\cdot\sin\left(\omega t+\varphi e^{pt}-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (1.46)$$

Verificarea pentru t = 0; avem:

$$U_C(0)=0 \text{ și } i(0)=\frac{U_m}{r}\sin\psi.$$

**Concluzii:**

1) În momentul conectării circuitului, condensatorul se comportă ca și când ar fi scurtcircuitat și tensiunea sursei se aplică la bornele rezistenței.

2) Expresia curentului (1.46) pentru $t=0$ este egală cu $i(0)=\frac{U_m}{r}\sin\psi$, adică apar salturi de curent la conectarea unor linii aeriene sau în cablu fără sarcină.

3) Curba $U_C(t)$ are o formă asemănătoare cu cea a curbei curentului $i(t)$ în circuitul $r$, $L$ la tensiune alternativă.

4) După un interval de timp cuprins între $\frac{T}{4}$ și $\frac{3T}{4}$ tensiunea la bornele condensatorului atinge valori, ce depășesc amplitudinea componentei permanente.

5) Tensiunea la bornele condensatorului $U_C$ are valoare maximă dacă la conectarea sursei de tensiune această tensiune trece prin valoarea maximă $(\psi - \varphi = \pi)$, iar constanta de timp a ciruitului $\tau$ este foarte mare (tinde spre infinit). Curba $u_C(t)$ în cazul este analoagă curbei curentului din fig.1.14.

6) După un interval de timp $\frac{1}{2}T$ de la conectare tensiunea $u_C$, atinge o valoare egală cu dublul valorii amplitudinii în regim staţionar.

$$U_{C\max} = 2U_{Cm}.$$

7) Dacă în momentul conectării este valabilă relaţia $U_{Cf}(0) = 0$, atunci şi $U_{Cl}(0) = 0$. În circuit se stabileşte imediat regimul staţionar.

### 1.9.1 Circuit multiplu ramificat cu un singur condensator

Se consideră circuitul din fig. 1.19.

Tensiunea tranzitorie are expresia:

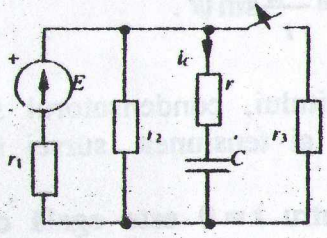


Fig. 1.19.

$$u_C(t) = u_{Cf} + u_{Cl} = u_{Cf} + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

unde $\tau = (r + r_{int})C$;

pentru t=0 $r_{int} = \dfrac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$;

$$u_C(0) = u_{Cf}(0) + A,$$

de unde $A = U_C(0) - U_{Cf}(0)$.

Deci avem:

$$u_C(t) = u_{Cf} + \left[u_C(0) - u_{Cf}(0)\right]e^{pt}. \qquad (1.47)$$

### 1.10 Scurtcircuitarea ramurii cu r, C

Se consideră circuitul din fig. 1.20., un condesator în serie cu un rezistor, care este scurtcircuitat la un moment dat (se închide întrerupătorul $K_2$).

Se presupune că inițial condensatorul "C" a fost încărcat de la o sursă de curent continuu până la tensiunea $U_0 = E$. Închizând întrerupătorul $K_2$, condensatorul se va descarcă pe rezistrorul "r".

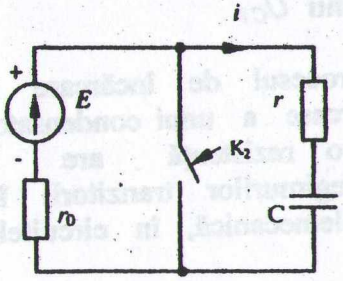


Fig. 1.20.

Tensiunea la bornele condensatorului și curentul "i" de descărcare au numai componente libere, deoarece $i_f = 0$; $U_{Cf} = 0$. Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff pentru conturul în care se descarcă condensatorul avem:

$$ri_l + U_{Cl} = 0; \quad i_l = C\frac{dU_{Cl}}{dt},$$

sau

$$rC\frac{dU_{Cl}}{dt} + U_{Cl} = 0, \qquad (1.48)$$

de unde $$U_{Cl}(t) = A \cdot e^{pt} = U_0 e^{-\frac{1}{rC}t}, \qquad (1.49)$$

Constanta de integrare A se determină din condiția inițială $U_C(0) = U_0 = A$, iar curentul tranzitoriu are expresia:

$$i(t) = i_l(t) = C\frac{dU_{Cl}}{dt} = -\frac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{rC}}. \qquad (1.50)$$

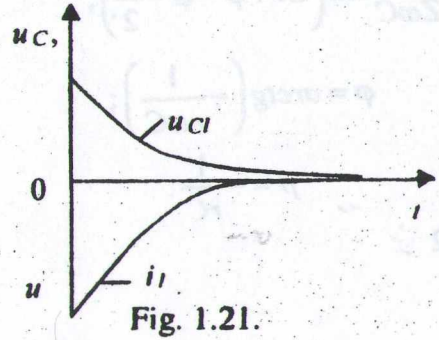


Fig. 1.21.

Curbele tensiunii și curentului sunt reprezentate în fig. 1.21.

Din punct de vedere energetic, procesul de scurtcircuitare al ramurii cu r, C se caracterizează prin

transformarea în căldură a energiei, înmagazinată în condensator până la comutație:

$$\int_0^\infty i^2 r dt = \frac{U_C^2}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{CU_0^2}{2}. \qquad (1.51)$$

Dacă condensatorul din ramura $r$, $C$ este alimentat de la o sursă de curent alternativ, atunci tensiunea pe condensator la momentul $t = 0$ va corespunde tensiunii pe condensator în momentul comutației.

## 1.11. Procesul tranzitoriu în circuit neramificat cu r, L, C

Se consideră circuitul din fig. 1.22. Un condensator $C$ încărcat la tensiunea $U_0$ se descarcă pe o ramură $r$, $L$.

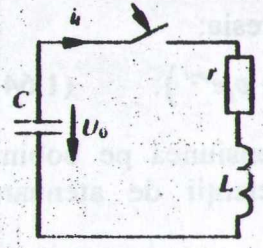


Fig. 1.22.

Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff (schema după comutație) se poate scrie:

$$ri_l + L\frac{di_l}{dt} + u_{Cl} = 0, \qquad (1.52)$$

unde

$$i_l = \frac{dq_l}{dt} = C\frac{dU_{Cl}}{dt}. \qquad (1.53)$$

Introducând valoarea $i_l$ în ecuația (1.52) și derivând rezultă o ecuație diferențială de gradul doi:

$$\frac{d^2u_{Cl}}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_{Cl}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{Cl} = 0. \qquad (1.54)$$

Ecuația sarcinii libere în condensator are expresia:

$$\frac{d^2q_l}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq_l}{dt} + \frac{1}{LC}q_l = 0. \qquad (1.55)$$

Luând derivata de timp de la ecuația (1.54) cu condiția (1.53) primim ecuația diferențială față de $i_l$:

$$\frac{d^2 i_l}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di_l}{dt} + \frac{1}{LC} i_l = 0. \qquad (1.56)$$

Indentitatea ecuației diferențiale demonstrează legea variației $u_{Cl}$, $q_l$, $i_l$.

La rezolvarea oricărei dintre aceste ecuații diferențiale se scrie ecuația caracteristică:

$$p^2 + \frac{r}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (1.57)$$

Caracterul procesului liber depinde numai de parametrii circuitului $r$, $L$, $C$, adică de tipul rădăcinilor ecuației caracteristice.

Rădăcinile se determină din expresia:

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,. \qquad (1.58)$$

Caracterul procesului liber depinde de semnul expresiei de sub rădăcina pătrată, adică de rădăcinile ecuației caracteristice, care pot fi numere reale sau complexe.

### 1.11.1. Descărcarea aperiodică a condensatorului

Descărcarea aperiodică a condensatorului, în prealabil încărcat, se numește descărcarea în rezistor și bobină (fig. 1.22) când tensiunea la bornele condensatorului descrește treptat de la $U_0$ până la 0, adică nu are loc reâncărcarea condensatorului.

Din punct de vedere energetic aceasta înseamnă că la descărcarea condensatorului energia furnizată de la el se transformă într-o mică măsură în energia câmpului magnetic al bobinei, iar cea mai mare parte a energiei este disipată (absorbită) pe rezistor. De la un moment dat, se transformă în căldură nu numai energia câmpului electric a condensatorului, dar și energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei.

Descărcarea aperiodică a condensatorului are loc, dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere reale, adică este

îndeplinită condiția :

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{sau} \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = r_{cr}, \qquad (1.59)$$

$r_{cr}$ - se numește rezistență critică, valoarea cea mai mică a rezistenței pentru care procesul liber are un caracter aperiodic:

$$r_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Rădăcinile $p_1$ și $p_2$ ale ecuației caracteristice sunt reale negative și diferite dacă este îndeplinită condiția:

$$r > r_{cr}.$$

În acest caz soluția ecuației diferențiale omogene de gradul doi are expresia:

$$U_{Cl} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \qquad (1.60)$$

unde $A_1$ și $A_2$ sunt constante de integrare, care se determină din condițiile inițiale; $p_1$ și $p_2$ sunt mărimi reale negative și diferite, deoarece procesul liber trebuie să fie atenuat (amortizat) în timp.

În conformitate cu (1.53), curentul $i_l$ are expresia:

$$i_l = C\frac{du_{Cl}}{dt} = C\left(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}\right). \qquad (1.61)$$

La descărcarea condensatorului $u_{Cf} = 0$, $i_f = 0$ și deci mărimile tranzitorii sunt egale cu mărimile libere:

$$u_C(t) = u_{Cl}(t); \quad i(t) = i_l(t).$$

Folosind condițiile inițiale $U_c(0) = U_0$, $i(0) = 0$, se determină constantele de integrare $A_1$ și $A_2$.

Introducând condițiile inițiale în (1.60) și (1.61), rezultă:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= A_1 + A_2 \\ 0 &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned}\right\},$$

de unde $A_1 = \frac{p_2 U_0}{p_2 - p_1}$; $A_2 = -\frac{p_1 U_0}{p_2 - p_1}$.

Înlocuind în ecuațiile (1.60) și (1.61), rezultă:

$$u_C(t) = u_{Cl}(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right); \quad (1.62)$$

$$i(t) = i_l(t) = \frac{C p_1 p_2 U_0}{p_2 - p_1}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right),$$

dar $$p_1 p_2 = \frac{1}{LC}, \quad p_2 - p_1 = -2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

și atunci:

$$i(t) = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). \quad (1.63)$$

Tensiunea la bornele bobinei are expresia:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right). \quad (1.64)$$

Curentul, tensiunea pe capacitate și tensiunea pe bobină au două componente exponențiale cu coeficienții de atenuare $p_1$ și $p_2$ determinați din ecuația (1.58).

Curbele de variație ale mărimilor $u_C$, $u_L$, $i$ și componentele lor sunt reprezentate în fig. 1.23. a, b. Ele demonstrează, că tensiunea $u_C$ se micșorează lin de la $U_0$, iar curentul crește de la zero până la maximum, apoi descrește, de asemenea. Tangenta la curba $u_C$ în origine este orizontală: curba are maximul în momentul inițial, ceea ce rezultă din condiția $i(0) = 0$.

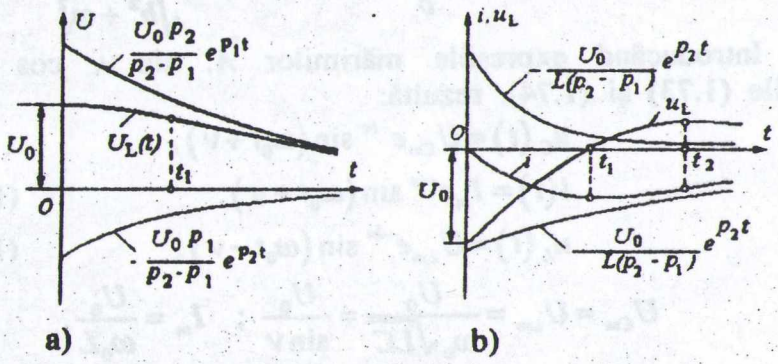
Deoarece $i = C\frac{du_C}{dt}$, maximul curbei curentului și punctul de inflexiune al curbei tensiunii $u_C$ se obțin în același punct corespunzător momentului $t_1$.

Valoarea timpului $t_1$ poate fi găsită din condiția ca

derivata $\frac{di}{dt}$ să fie egală cu zero.

Tensiunea pe bobină variază de la mărimea $u_0$, deoarece pentru $t = 0$, $i$ şi $u_r$ (tensiunea pe rezistenţă) sunt egale cu zero şi prin urmare tensiunea pe capacitate şi tensiunea pe bobină sunt egale între ele.

Tensiunea pe bobină la început descreşte, pe urmă trece prin zero în momentul când curentul are valoarea maximă (ceea ce rezultă din relaţia $u_L = L\frac{di}{dt}$ şi creşte până la o oarecare mărime valoare pozitivă maximă, după care descreşte şi tinde la zero.




a) b)

Fig 1.23

Până când curentul descreşte algebric (de la 0 până la $t_1$) f.e.m. indusă, ce menţine curentul în conformitate cu legea lui Lentz, are semnul plus (+), iar tensiunea pe bobină semnul negativ (-). Când curentul începe să crească algebric, f.e.m. indusă se opune lui şi va fi negativă, iar tensiunea pe bobină - pozitivă.

Punctul de maximum al curbei "$u_L$" şi punctul de inflexiune al curbei "$i$" coincid şi au loc în momentul de timp $t_2$, care se poate determina din egalitatea:

$$U_L = L\frac{di}{dt},$$

când $$\frac{dU_L}{dt} = 0.$$

Din expresia (1.58) urmează, că mărind valoarea inductanței "$L$" se micșorează valorile absolute ale mărimilor $p_1$ și $p_2$ și prin urmare se micșorează creșterile curentului și căderii de tensiune la bornele condensatorului.

### 1.11.2 Descărcarea aperiodico-critică a condensatorului

Dacă este îndeplinită condiția $r = r_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ rădăcinile $p_1$ și $p_2$ sunt mărimi reale negative și egale, adică:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{r}{2L}. \qquad (1.65)$$

Soluția ecuației diferențiale omogene de gradul al doilea este:
pentru tensiunea la bornele condensatorului:

$$u_{Cl} = u_C = (A_1 + A_2 t)e^{pt}, \qquad (1.66)$$

iar curentul are expresia:

$$i_l = i = C(A_2 + pA_1 + pA_2 t)e^{pt}. \qquad (1.67)$$

Din condițiile inițiale $U_c(0)=U_0$, $i(0)=0$ se determină constantele de integrare:

$$A_1 = U_0; \quad A_2 = -pU_0.$$

Introducând $A_1$ și $A_2$ în (1.66) și (1.67), avem:

$$u_C(t) = U_0(1 - pt)e^{pt}, \qquad (1.68)$$

$$i(t) = -Cp^2 U_0 te^{pt} = -\frac{U_0}{L}te^{pt}. \qquad (1.69)$$

Tensiunea la bornele bobinei are expresia:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -U_0(1 + pt)e^{pt}. \qquad (1.70)$$

Curbele de variație ale mărimilor $i$, $u_C$, $u_L$ nu se deosebesc după formulă de curbele din fig. 1.23 a, b.

### 1.11.3. Descărcarea periodico-oscilantă a condensatorului

Dacă este îndeplinită condiția: $r < r_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, descărcarea condensatorului va fi periodică (oscilantă). Rezistența conturului este mai mică de cât rezistența critică și rădăcinile ecuației caracteristice sunt numere complex conjugate:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{r}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}; \\ p_2 &= -\frac{r}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.71)$$

Se notează $b = \frac{r}{2L}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$.

Așa că $\sqrt{b^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

unde: $\omega_0$ - pulsația proprie, $s^{-1}$;

$T_0$ - perioada pulsațiilor proprii, s.

Cu notațiile de mai sus, rădăcinile ecuației caracteristice devin:

$$p_1 = -b + j\omega_0; \quad p_2 = -b - j\omega_0. \qquad (1.72)$$

Din matematică este cunoscut, că soluția ecuației diferențiale cu rădăcini complexe, se poate scrie sub forma următoare:

tensiunea pe condensator are expresia:

$$u_C(t) = Ae^{-bt}\sin(\omega_0 t + \nu), \qquad (1.73)$$

curentul din circuit va avea atunci expresia:

$$i_l(t)=C\frac{du_C}{dt}=CAe^{-bt}\left(-b\sin(\omega_0 t+\nu)+\omega_0\cos(\omega_0 t+\nu)\right), \quad (1.74)$$

unde $\nu$ - faza inițială, $A$ - constanta de integrare.

Mărimile $A$ și $\nu$ se determină din condițiile inițiale stabilite în conformitate cu legile comutației: $u_C(0)=U_0$, $i(0)=0$.

Din ecuațiile (1.73) și (1.74) rezultă pentru $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= A\sin\nu \\ 0 &= CA\left(-b\sin\nu+\omega_0\cos\nu\right)\end{aligned}\right\}, \quad (1.75)$$

De unde $A=U_0\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $\cos\nu=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+\omega_0^2}}$;

$$tg\nu=\frac{\omega_0}{b}; \qquad \sin\nu=\frac{\omega_0}{\sqrt{b^2+\omega_0^2}}.$$

Introducând expresiile mărimilor $A$, $\sin\nu$, $\cos\nu$ în ecuațiile (1.73) și (1.74), rezultă:

$$u_C(t)=U_{Cm}e^{-bt}\sin(\omega_0 t+\nu), \quad (1.76)$$

$$i(t)=I_m e^{-bt}\sin(\omega_0 t+\pi), \quad (1.77)$$

$$u_L(t)=U_{Lm}e^{-bt}\sin(\omega_0 t-\nu), \quad (1.78)$$

unde $U_{Cm}=U_{Lm}=\dfrac{U_0}{\omega_0\sqrt{LC}}=\dfrac{U_0}{\sin\nu}$; $I_m=\dfrac{U_0}{\omega_0 L}$.

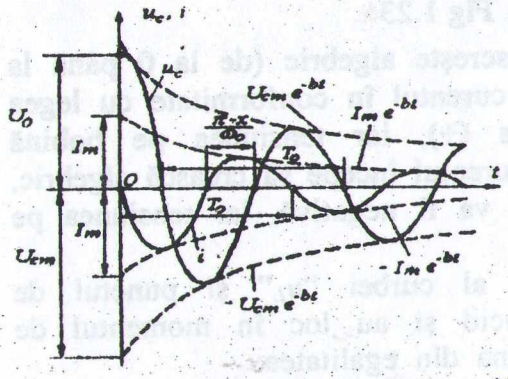



Fig 1.24

În fig. 1.24 sunt reprezentate curbele $u_C(t)$, $i(t)$. Curentul, tensiunea pe condensator și tensiunea pe bobină sunt funcții sinusoidale amortizate cu pulsația proprie "$\omega_0$" și factorul de amortizare "$b$", care depind ca și faza

inițială "ν" numai de parametrii $r$, $L$, $C$.

Mărimile $U_{Cm}$, $U_{Lm}$, $I_m$ - depind de parametrii conturului și de tensiunea inițială la bornele condensatorului $u_0 = u_C(0)$.

Din ecuațiile (1.76), (1.77), (1.78) reiese că intensitatea curentului este defazată în avans față de tensiunea la bornele condensatorului cu $(\pi - \nu)$.

Curbele $u_C$, $i$ nu sunt pur sinusoidale, ci au caracter sinusoidal - amortizat. Pentru fiecare semiperioadă, zona de creștere a curbei ocupă pe ordonată mai puțin de $\frac{1}{4}T$, iar zona de descreștere - mai mult de $\frac{1}{4}T$, deoarece în relații apare factorul - $e^{-bt}$.

### 1.11.4. Determinarea mărimilor instantanee $u_C$, $i$ și $u_L$

Asemănător funcțiilor sinusoidale, la care mărimile momentane se determină prin proiecția vectorului pe axa imaginară, mărimile momentane pentru $u_C$, $i$, $u_L$ pot fi determinate ca proiecții pe axa verticală ale vectorilor $U_{Cm}e^{-bt}$, $U_{Lm}e^{-bt}$, $I_m e^{-bt}$, ce se rotesc cu viteza unghiulară $\omega_0$.

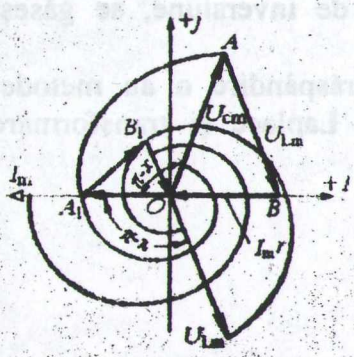


Fig 1.25

Lungimea vectorilor descrește proporțional cu mărimea $e^{-bt}$. Extremitățile acestor vectori descriu o spirală logaritmică. Astfel, poate fi construită diagrama vectorială din fig. 1.25. Din această diagramă vectorială reiese că tensiunea $u_C$ este defazată în urma curentului cu $(\pi - \nu)$, iar tensiunea $u_L$ este defazată în avans față de curent cu $(\pi - \nu)$.

Razele - vectorii $U_{cm}$, $I_m r$ şi $U_{Lm}$, formează un triunghi isoscel ţu numai în momentul iniţial:

$AB + BO + OA = 0$.

Această egalitate defazată reiese din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$U_L + ri_i + U_{Cl} = 0. \qquad (1.79)$$

Viteza de amortizare a oscilaţiilor considerate caracterizează raportul tensiunilor la momentul $t$ şi la momentul $t + T_0$:

$$\frac{U_C(t)}{U_C(t+T_0)} = \frac{U_{Cm}e^{-bt}\sin(\omega_0 t + v)}{U_{Cm}e^{-b(t+T_0)}\sin[\omega_0(t+T_0)+v]} = e^{bT_0}$$

Acest raport se numeşte decrementul oscilaţiilor şi este o mărime constantă care depinde de parametrii $r$, $L$, $C$ al circuitului şi nu depinde de timp.

Logaritmul natural al decrementului oscilaţiilor se numeşte decrementul logaritmic al amortizării:

$$\Delta = \ln\frac{U_C(t)}{U_C(t+T_0)} = bT_0.$$

Dacă curba amortizează încet valoarea raportului mărimilor la momentele $t$ şi $(t+T_0)$ este aproape de unitate, iar decrementul logaritmic este aproape de 0. Spirala logaritmică se răsuceşte încet.

Dacă amortizarea are o valoare însemnată, atunci spirala logaritmică se va suci destul de repede.

**Concluzii:** .

1. Rezistenţa $r$ influenţează substanţial viteza procesului oscilant la descărcarea condensatorului.

2. Cu micşorarea rezistenţei "$r$" se micşorează şi $\omega_0$ şi se măreşte perioada $T_0$.

3. Dacă $r = r_{cr}$ pulsaţia $\omega_0$ va fi egală cu zero, iar $T_0$ tinde spre infinit. Acest proces corespunde descărcării aperiodice.

4. La descărcarea oscilantă a condensatorului, în cazul unei bobine ideale ($r=0$) rezultă $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; tg\gamma = \infty; \gamma = \frac{\pi}{2}; b = 0$, adică procesul de amortizare nu are loc şi $\omega_0$ are valoarea cea mai mare posibilă.

5. Din egalităţile (1.76), (1.77), (1,78) rezultă, că mărimile $u_C$, $i$ şi $u_L$ variază armonic cu pulsaţia $\omega_0$:

$$\left.\begin{aligned} u_C &= U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right); \\ i &= \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin(\omega_0 t + \pi); \\ u_L(t) &= U_0 \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\}, \qquad (1.80)$$

Deoarece $r = 0$, energia înmagazinată la început rămâne neschimbată. Energia trece respectiv din câmpul electric în câmpul magnetic şi invers.

## 2. METODA OPERAŢIONALĂ

### Calculul circuitelor electrice liniare în regim tranzitoriu

În afară de metoda clasică de rezolvare a ecuaţiilor integro - diferenţiale ale circuitelor electrice, bazată pe integrarea directă, în studiul regimului tranzitoriu se folosesc şi alte metode de ar. .za.

Există metode de analiză în domeniul timp, din care face parte şi metoda de integrare directă a ecuaţiilor. Se menţionează în acest sens metoda răspunsului tranzitoriu la excitaţii treaptă sau delta. De asemenea, o metodă, care se impune tot mai mult în teoria modernă a circuitelor electrice este metoda variabilelor de stare.

O altă metodă este metoda operaţională, cunoscută din matematică ca metodă de integrare a unor clase de ecuaţii diferenţiale liniare. Ideea de bază a acestei metode constă în a asocia funcţiilor de timp câte o funcţie pe baza unor transformări integrale; funcţia de timp se numeşte originală, iar funcţia obţinută pe baza transformării considerate se numeşte funcţie transformată sau imagine. Pe această cale, ecuaţiile diferenţiale liniare originale se transformă în ecuaţii mai simple, algebrice cu necunoscute imagini. Rezolvând aceste ecuaţii se determină imaginea funcţiei necunoscute, iar într-o a doua etapă, folosind anumite metode de inversiune, se găseşte funcţia necunoscută.

În electrotehnică o largă răspândire o au metodele operaţionale bazate pe transformarea Laplace şi transformarea Fourier.

## 2.1 Metoda operaţională pe baza transformării Laplace

Trecerea de la funcţie-original la imagine se efectuează cu ajutorul transformării Laplace.

Fie o funcţie $f(t)$ de variabila independentă "$t$" numită şi funcţie original. Se numeşte transformata Laplace sau imaginea Laplace funcţia $F(p)$ de variabilă complexă $p = a + jb$ definită de integrala

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt . \qquad (2.1)$$

Concordanţa între $F(p)$ şi $f(t)$ se scrie în felul următor

$$F(p) \doteq f(t).$$

Pentru ca să existe transformata Laplace este necesar ca integrala (2.1) să aibă sens, respectiv să fie convergentă. În electrotehnică avem de a face de obicei cu funcţii pentru care transformarea Laplace este posibilă. Fără a analiza problema într-un cadru mai general, se poate menţiona că integrala (2.1) este convergentă dacă sunt indeplinite următoarele condiţii:

a) prima condiţie se referă la continuitatea funcţiei $f(t)$, pentru $t>0$, funcţia $f(t)$ să fie netedă pe porţiuni;

b) a doua condiţie se referă la partea reală "$a$" a variabilei complexe "$p$": Se poate observa în acest sens că valoarea absolută a factorului $e^{-pt}$ (relaţia 2.1) tinde spre zero pentru $t \to \infty$ dacă $a>0$.

Pe de altă parte, dacă funcţia $f(t)$ creşte odată cu "$t$", iar în al doilea caz $a = \mathrm{Re}\,(p)$, integrala (2.1) are sens deoarece descreşterea exponenţialei ($e^{-pt}$) este mai rapidă decât creşterea funcţiei $f(t)$. Din cele prezentate mai sus rezultă că integrala (2.1) are sens pentru orice valoare a variabilei "$p$" a cărui parte reală este mai mare decât $a_0$, respectiv $a = \mathrm{Re}\,(p) > a_0$.

Transformarea Laplace este biunivocă. Unei funcții $f(t)$ i se asociază o funcție $F(p)$ pe baza integralei (2.1), și invers, fiecărei transformate Laplace $F(p)$ îi corespunde pentru $t>0$ o funcție originală unică f(t). Se arată, că funcția original este exprimată, într-o formă generală, de integrala:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_0-j\omega}^{\alpha_0+j\omega} F(p)e^{pt}dt, \qquad (2.2)$$

numită și formula lui Melin - Fourier. Pentru trecerea de la funcția imagine la funcția original, în practică se aplică diferite metode de inversiune.

## 2.2. Imaginea constantei

Se cere să se afle imaginea funcției $f(t)=A$, unde $A$ - este o mărime constantă. Conform integralei (2.1),

$$F(p)=\int_0^{\infty} Ae^{-pt}dt = A\left(-\frac{1}{p}\right)\int_0^{\infty} d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{Ae^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}$$

$$A=\frac{A}{p}. \qquad (2.3)$$

## 2.3. Transformata Laplace a funcției exponențiale $f(t)=e^{\alpha t}$

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha-p}\left[e^{(\alpha-p)t}\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}. \qquad (2.4)$$

$$e^{\alpha t}=\frac{1}{p-\alpha}.$$

În cazul funcției sinusoidale $f(t)=\sin\omega t$, ținând seama de relația $\sin\omega t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$, pentru transformarea Laplace se obține expresia

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin\omega t\,dt=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \qquad (2.5)$$

$$\sin\omega t=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

## 2.4. Transformata Laplace a derivatei unei funcţii de timp

$$\frac{df(t)}{dt}=pF(p)-f(0).$$

$$\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-pt}d\left[f(t)\right]. \qquad (2.6)$$

Se integrează prin părţi cu notaţiile $e^{-pt}=u$;

$$d\left[f(t)\right]=dv \int udv=uv-\int vdu.$$

Prin urmare

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}d\left[f(t)\right]=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}f(t)d\left[e^{-pt}\right];$$

unde $$e^{-pt}f(t)\Big|_0^{\infty}=0-f(0)=-f(0),$$

iar $$-\int_0^{\infty}f(t)d\left[e^{-pt}\right]=p\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=pF(p).$$

Astfel $$\int_0^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt=pF(p)-f(0),$$

sau $$\frac{df(t)}{dt}=pF(p)-f(0). \qquad (2.7)$$

Transformata Laplace a derivatei este folosită pentru determinarea imaginei căderii de tensiune pe inductanţă, adică a funcţiei

$$u_L=L\frac{di}{dt}.$$

În conformitate cu relaţia (2.7)

$$L\frac{di}{dt}=LpI(p)-Li(0), \qquad (2.8)$$

dacă $i(0)=0$, atunci

$$L\frac{di}{dt} = LpI(p). \tag{2.9}$$

## 2.5. Transformata Laplace a derivatei de ordinul doi a unei funcţii de timp

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = p^2F(p) - pf(0) - \left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0}. \tag{2.10}$$

Imaginea derivatei de ordinul doi a curentului are următoarea expresie:

$$\frac{d^2i}{dt^2} = p^2I(p) - pi(0) - i'(0). \tag{2.11}$$

## 2.6. Transformata Laplace a integralei unei funcţii de timp

$$\left(\int_0^t f(t)dt\right).$$

Se cere să se determine imaginea funcţiei $\int_0^t f(t)dt$, dacă este cunoscut că imaginea funcţiei $f(t)$ este $F(p)$: $\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] d\left[e^{-pt}\right]$. Se notează $\int_0^t f(t)dt = u$; $d\left(e^{-pt}\right) = dv$ şi se integrează prin părţi.

$$-\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] d\left(e^{-pt}\right) = -\frac{1}{p}\left[\int_0^t f(t)dt\right] e^{-pt}\Bigg|_0^\infty + \frac{\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt}{p} = \frac{F(p)}{p}$$

Astfel

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{F(p)}{p}. \tag{2.12}$$

Imaginea tensiunii la bornele condensatorului $u_C = \frac{1}{C}\int idt$ sau $u_C = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t idt$ este în conformitate cu relaţia (2.12):

$$u_C(t) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}. \qquad (2.13)$$

În tab. 2.1 sunt date transformatele Laplace ale unor funcţii de timp mai des aplicate.

Tabelul 2.1

| N d/o | Originalul $f(t)$ | Transformarea Laplace $F(p)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $A$ | $\frac{A}{p}$ |
| 2 | $t$ | $\frac{1}{p^2}$ |
| 3 | $e^{\pm\alpha t}$ | $\frac{1}{p+\alpha}$ |
| 4 | $e^{\pm\omega t}$ | $\frac{1}{p+\omega}$ |
| 5 | $1-e^{-\alpha t}$ | $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$ |
| 6 | $t\cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$ |
| 7 | $(1-\alpha t)\cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{p}{(p+\alpha)^2}$ |
| 8 | $\frac{1}{\alpha^2}\left[1\cdot e^{-\alpha t}(1+\alpha)\right]$ | $\frac{1}{p^2(p+\alpha)}$ |

Continuarea tabelului 2.1

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $\frac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$ | $\frac{p}{(p+a)(p+b)}$ |
| 10 | $\frac{1}{ab}+\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{-bt}}{b}-\frac{e^{-at}}{a}\right)$ | $\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$ |
| 11 | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| 12 | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ |
| 13 | $sh\alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ |
| 14 | $ch\alpha t$ | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ |
| 15 | $t\cdot\sin \alpha t$ | $\frac{2\alpha p}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$ |
| 16 | $t\cdot\cos \alpha t$ | $\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$ |
| 17 | $e^{-\beta t}\cdot\sin \alpha t$ | $\frac{\alpha}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$ |
| 18 | $e^{-\beta t}\cdot\cos \alpha t$ | $\frac{p+\beta}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$ |
| 19 | $e^{-\beta t}\cdot sh\alpha t$ | $\frac{\alpha}{(p+\beta)^2-\alpha^2}$ |
| 20 | $e^{-\beta t}\cdot ch\alpha t$ | $\frac{p+\beta}{(p+\beta)^2-\alpha^2}$ |

## 2.7. Teoreme ale transformării Laplace

Transformarea Laplace satisface anumite teoreme, prezentate în continuare.

*1) Teorema întârzierii (retardării)*

Dacă imaginea funcției $f(t)$ este $F(p)$, atunci imaginea funcției $f(t-\tau)$ este $e^{-p\tau}F(p)$.

Teorema se demonstrează prin înlocuirea funcției $f(t)$ cu funcția $f(t-\tau)$ în transformata Laplace și introducerea variabilei noi $t-\tau=t_1$:

$$dt = dt_1;\quad e^{-pt} = e^{-p\tau}\cdot e^{-pt_1},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot f(t-\tau)d\tau = e^{-p\tau}\Big|_0^{\infty} e^{-pt_1}\cdot f(t_1)dt_1 = e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

*2) Teorema deplasării în zona imaginilor.*

Dacă imaginea $F(p)$ corespunde funcției $f(t)$, atunci imaginii $F(p-\lambda)$ îi corespunde funcția $e^{\lambda t}\cdot f(t)$.

Teorema se demonstrează prin introducerea funcției $e^{\lambda t}\cdot f(t)$ în formula transformatei Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\cdot e^{\lambda t}\cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\lambda)} f(t)dt = F(p-\lambda)$$

### Exemplu

Să se afle originalul funcției $\dfrac{1}{(p+\lambda)^2}$, dacă este cunoscut, că originalul funcției $\dfrac{1}{p^2}=t$.

Rezolvare: $\frac{1}{(p+\lambda)^2} = e^{-\lambda t} t.$

*3) Teorema schimbării scării (teorema asemănării)*

Dacă funcţiei $f(t)$ îi corespunde imaginea $F(p)$, atunci funcţiei $f(\alpha t)$ îi corespunde imaginea $\frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Teorema se demonstrează în felul următor:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(\alpha t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)} f(\alpha t)\, d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

*4) Teorema determinării valorii iniţiale a funcţiei de timp f(0) prin imaginea funcţiei F(p):*

$$f(0) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$$

$\left( \lim_{p \to \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = 0 \right)$ din relaţia

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \lim_{p \to \infty} \left[ pF(p) - f(0) \right].$$

*5) Teorema determinării valorii iniţiale a unei funcţii de timp f(∞) prin imaginea funcţiei F(p):*

$$f(\infty) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$$

Această relaţie se obţine dacă în relaţia

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0) \text{ se înlocuieşte}$$

primim, că $p \to \infty$ şi $e^{-pt} = 1$.

Rezultă: $\int_0^\infty df(t) = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0)$ sau

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to a} pF(p).$$

## 2.8 Legea lui Ohm sub forma operațională

Fie o porțiune a circuitului compus reprezentată în (fig.2.1). Între nodurile "*a*" și "*b*" se află latura cu elementele $R, L, C$ și sursa de f.e.m. $e(t)$. Aceasta latură este parcursă de curentul $i$. Introducerea întrerupătorului "K" conduce la un proces tranzitoriu. Conform legilor comutației curentul prin bobină satisface condiției $i_L(0_-)=i_L(0)=i_L(0_+)$, iar tensiunea pe condensator condiției $u_C(0_-)=u_C(0)=u_C(0_+)$, nu se schimbă brusc.

Se exprimă potențialul punctului "*a*" cu ajutorul potențialului punctului "*b*" (schema după comutație).

$$\varphi_a=\varphi_b+u_C-e(t)+u_L+u_R, \qquad (2.14)$$

sau
$$u_{ab}=\varphi_a-\varphi_b=u_R+u_L+u_C-e(t), \qquad (2.15)$$

unde
$$u_L=L\frac{di}{dt};\quad u_C=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t idt.$$

Atunci :
$$u_{ab}=iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt+u_C(0)-e(t). \qquad (2.16)$$

Se folosesc transformările Laplace

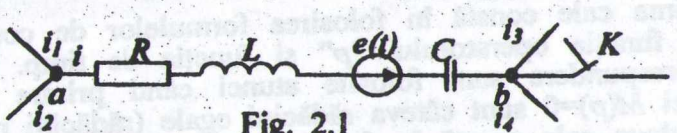


Fig. 2.1

$$L\frac{di}{dt}=LpI(p)-Li(0);\quad u_C(0)=\frac{u_C(0)}{p};\quad \frac{1}{C}\int_0^t idt=\frac{I(p)}{pC};$$

$$e(t)=E(p).$$

Se obține: $$U_{ab}(p)=I(p)\left[R+pL+\frac{1}{pC}\right]-Li(0)+\frac{u_C(0)}{p}-E(p). \qquad (2.17)$$

Astfel, transformarea Laplace a permis să se treacă de la ecuația integro-diferențială (2.16) la ecuația algebrică (2.17).

Din ecuaţia (2.17) se obţine

$$I(p)=\frac{U_{ab}(p)+Li(0)-\frac{u_C(0)}{p}+E(p)}{Z(p)}, \qquad (2.18)$$

unde $Z(p)=R+pL+\frac{1}{pC}$ exprimă impedanţa operaţională.

Structura impedanţei operaţionale $Z(p)$ este analogă structurii impedanţei acestei porţiuni în curent alternativ, cu condiţia înlocuirii operatorului operaţional "$j\omega$" prin "$p$".
Ecuaţia (2.18) exprimă legea lui Ohm în formă operaţională.
Componenta $Li(0)$ - reprezintă f.e.m. internă determinată de energia înmagazinată în câmpul magnetic al bobinei cu inductanţa "$L$", ca rezultat al trecerii curentului prin bobină $i(0)$ înainte de comutaţie.
Componenta $U_c(0)$ - reprezintă f.e.m. internă determinată de energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului, ca rezultat al prezenţei tensiunii $U_C(0)$ pe condensator înainte de comutaţie.
Legea lui Ohm, cu condiţia că mărimile $U_C(0)$, $i(0)$ sunt egale cu zero, are o formă mai simplă

$$I(p)=\frac{U_{ab}(p)+E(p)}{Z(p)}.$$

## 2.9. Prima teoremă a lui Kirchhoff în forma operaţională

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff suma algebrică a valorilor momentane ale curenţilor în orice nod al schemei este egală cu zero (fig.2.2).

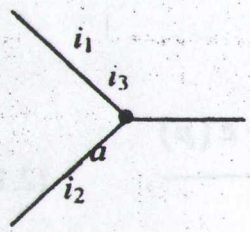



Fig. 2.2.

$$i_{1+} + i_2 - i_3 = 0$$

După aplicarea transformării Laplace rezultă

$$I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) = 0.$$

Teorema lui Kirchhoff în forma operațională este, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(p) = 0. \qquad (2.19)$$

## 2.10. Teorema a doua a lui Kirchhoff în formă operațională

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pentru schema din fig.2.3, se obține

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + u_c(0) + \frac{1}{C}\int i_3 dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = e_1(t) - e_3(t). \qquad (2.20)$$

Se determină imaginile fiecărei componente în forma operațională:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 p I_1(p) - L_1 i_1(0);$$

$$M \frac{di_2}{dt} = M p I_2(p) - M i_2(0);$$

$$\frac{1}{C}\int i_3 dt = \frac{I_3(p)}{pC};$$

$$i_2 R_2 = I_2(p) R_2;$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 p I_2(p) - L_2 i_2(0);$$

$$M \frac{di_1}{dt} = M p I_1(p) - M i_1(0);$$

$$e_1(t) = E_1(p);\ e_3(t) = E_3(p).$$

Înlocuind originalele componentelor prin imaginile componentelor în ecuația (2.20), se obține:

$$I_1(p)Z_1(p)+I_2(p)Z_2(p)+I_3(p)Z_3(p)=E_1(p)-E_3(p)+E_{int}, \quad (2.21)$$

unde $Z_1(p)=p(L_1-M)$; $Z_2(p)=p(M-L_2)-R_2$;

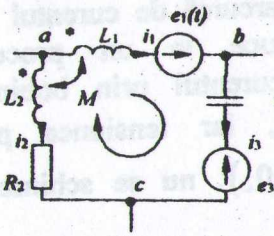



Fig. 2.3

$$Z_3(p)=\frac{1}{pC};$$

$$E_{int}(p)=(L_1-M)i_1(0)+$$

$$+(M-L_2)i_2(0)-\frac{u_C(0)}{p};$$

sau $$\sum_{k=1}^{n} I_k(p)Z_k(p)=\sum_{m=1}^{p} E_m(p). \quad (2.22)$$

## 2.11. Algoritmul de aplicare a metodei operaţionale

Calculul prin metoda operaţională conţine două etape:

1) Trecerea de la originalul funcţiilor la imaginile lor în forma operaţională. Alcătuirea schemei operaţionale şi determinarea funcţiei căutate sub forma operaţională;

2) Trecerea de la funcţia căutată în forma operaţională la funcţia căutată în forma funcţiei de timp prin aplicarea formulei de descompunere.

### 2.11.1. Trecerea de la imagine la funcţia de timp

Trecerea de la imagine la funcţia de timp poate fi îndeplinită prin două căi:

1) Prima cale constă în folosirea formulelor de corespundere dintre funcţia operatorului "$p$" şi funcţia de timp. Formulele de corespundere sunt folosite atunci când printre rădăcinile ecuaţiei $M(p)=0$ sunt câteva rădăcini egale (rădăcini multiple).

2) A doua cale constă în folosirea formulei de descompunere. Formula de descompunere se deduce din presupunerea, că ecuaţia $M(p)=0$ n-are rădăcini multiple (la existenţa rădăcinilor multiple formula descompunerii se scrie în altă forma).

$$\frac{N(p)}{M(p)}=\sum_{1}^{q}\frac{N(p_k)}{M(p_k)}e^{p_k t}+\frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[N(p)\cdot(p-p_r)^r e^{pt}\right]_{p=p_r}+$$

$$+\frac{1}{(s-1)!}\cdot\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[\frac{N(p)\cdot(p-p_s)^s e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_s} \quad (2.23)$$

Formula de descompunere este pe larg folosită în practică ca formulă de bază la trecerea de la imagine la funcţia de timp.

### 2.11.2. Formula descompunerii. Deducerea

Fie că imaginea curentului prezintă fracţia:

$$I(p)=\frac{N(p)}{M(p)}. \qquad (2.24)$$

Din cursul matematicii este cunoscut, că fracţia

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}, \qquad (2.25)$$

cu condiţia, că pentru $n<m$ polinomul

$$M(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0=0$$

n-are rădăcini multiple, se poate de prezentat fracţia în forma sumei factorilor simpli

$$\frac{N(x)}{M(x)}=A_1\frac{1}{x-x_1}+A_2\frac{1}{x-x_2}+\ldots+A_m\frac{1}{x-x_m}, \qquad (2.26)$$

sau

$$\frac{N(x)}{M(x)}=\sum_1^m A_k\frac{1}{x-x_k}, \qquad (2.27)$$

unde $x_k$ - rădăcinile ecuaţiei $M(x)=0$,

$A_1$, $A_2$, ... $A_m$ - coeficienţii, care pot fi determinaţi prin două căi:

a) prima cale - *metoda coeficienţilor neidentificaţi*. Aceasta metodă este elementară, dar este legată de calcule complicate.

b) a doua cale - la prima vedere este compusă, iar în realitate este mai simplă.

**Exemplu pentru prima cale**

să se descompună fracţia $\frac{1}{x^2-5x+6}$ într-o sumă de fracţii simple.

Se determină rădăcinile din relaţia $M(x)=0$, adică $x^2-5x+6=0$.

De unde $x_1=2$, $x_2=3$.

Astfel

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=A_1\frac{1}{x-2}+A_2\frac{1}{x-3},$$

sau

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{(A_1+A_2)x-3A_1-2A_2}{x^2-5x+6}.$$

Prin compararea coeficienţilor pentru unul şi acelaşi ordin a lui "$x$" se scrie sistemul de ecuaţii pentru determinarea coeficienţilor $A_1$, $A_2$.

În cazul de faţă

$$\left.\begin{aligned}A_1+A_2&=0\\-3A_1-2A_2&=1\end{aligned}\right\}\ \text{de unde}\ \begin{aligned}A_1&=-1\\A_2&=1\end{aligned}$$

Rezultă $$\frac{1}{x^2-5x+6}=-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}.$$

**Exemplu pentru a doua cale**

Pentru a determina $A_1$ se înmulţesc ambele părţi ale ecuaţiei (2.27) cu $(x-x_1)$ .

$$\frac{N(x)}{M(x)}(x-x_1)=A_1+(x-x_1)\sum_{k=2}^{n}A_k\frac{1}{x-x_k}. \qquad (2.28)$$

În ecuaţia (2.28) în partea dreaptă avem coeficientul $A_1$, iar în partea stânga se obţine raportul $\frac{x-x_1}{M(x)}$ ce prezintă o

nedeterminare, deoarece factorul $(x-x_1)$ cond $x \to x_1$ se anulează, iar $M(x)=0$ este, de asemenea, egal cu zero.
Pentru eliminarea acestei nedeterminări se foloseşte regula lui L'Hopital

$$\lim_{x \to x_1} \frac{(x-x_1)N(x)}{M(x)} = \lim \frac{N(x)+(x-x_1)N'(x)}{M'(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)},$$

unde: $N(x_1)$ - mărimea $N(x)$ pentru $x=x_1$;

$M'(x_1)$ - mărimea $M'(x)$ pentru $x=x_1$.

Prin urmare din (2.28) obţinem

$$\frac{N(x_1)}{M'(x_1)} = A_1.$$

Analogic

$$\frac{N(x_2)}{M'(x_2)} = A_2;$$

Astfel

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \frac{N(x_1)}{M'(x_1)} \cdot \frac{1}{x-x_1} + \frac{N(x_2)}{M'(x_2)} \cdot \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{N(x_m)}{M'(x_m)} \cdot \frac{1}{x-x_m}, \quad (2.29)$$

sau

$$\frac{N(x)}{M(x)} = \sum_{1}^{m} \frac{N(x_k)}{M'(x_k)} \cdot \frac{1}{x-x_k}. \quad (2.30)$$

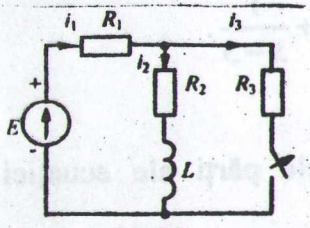


Fig. 2.4.

Pentru funcţia curentului, avem

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} =$$

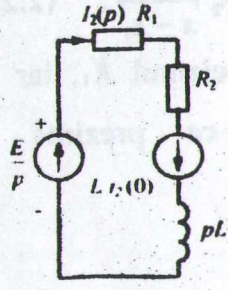


Fig. 2.5.

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k}. \quad (2.31)$$

Trecerea la originalul funcţiei

$$\frac{1}{p-p_k} \doteq e^{p_k t}; \quad I(p) \doteq i(t)$$

$$i(t) \doteq \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \qquad (2.32)$$

adică

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \frac{1}{p-p_k} \doteq \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (2.33)$$

Numărul componentelor $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$ este egal cu numărul rădăcinilor ecuației $M(p)=0$.

Coeficienții $\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ se pot compara cu constantele de integrare a ecuației diferențiale a circuitului în cadrul metodei clasice de calcul al proceselor tranzitorii.

Dacă printre rădăcinile ecuației $M(p)=0$ este o rădăcină egală cu zero ($p=0$), atunci în partea drepta a ecuației (2.32) se obține componenta $\frac{N(0)}{M'(0)} e^{0t} = \frac{N(0)}{M'(0)}$ ce reprezintă componenta curentului (tensiunii) ca mărime de determinat, ce este rezultatul acțiunii f.e.m. de curent continuu.

**Exemplu (metoda operațională)**

Se dau: $E=120$ $V$, $L=2$ $H$, $R_1=40$ $\Omega$, $R_1=R_3=160$ $\Omega$. (Fig. 2.4)

Se cere să se determine: $i_2(t)$; $u_L(t)$.

**Rezolvare:**

**I. Prima etapă.**

1. Determinarea valorilor inițiale conform legilor comutației

$$i_2(0)=\frac{E}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}\cdot\frac{R_3}{R_2+R_3}=0,5A$$

(schema până la comutație).

2. Schema echivalentă se prezintă în fig. 2.5

$$E\doteq\frac{E}{p};\qquad {}_L(t)\doteq I_2(p)\,pL-Li_2(0);\quad i_2(t)\doteq I_2(p).$$

3. Determinarea funcției imagine $I_2(p)$

$$I_2(p)=\frac{E+pL\cdot i_2(0)}{p(R_1+R_2+pL)}=\frac{N(p)}{M(p)}.$$

II. Etapa a doua - trecerea la funcția - timp.

1. Se determină rădăcinile ecuației caracteristice. Din expresia $M(p)=0$; $2p^2+200p=0$; Rezultă $p_1=0$; $p_2=-100\ s^{-1}$.

2. Folosirea formulei descompunerii

$$i_2(t)=\sum_{k=1}^{2}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_kt}=\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2t},$$

unde

$$p_1=0\begin{cases}N(p_1)=120\\M'(p_1)=200\end{cases}\qquad p_2=-100s^{-1}\begin{cases}N(p_2)=20\\M'(p_2)=-200\end{cases}$$

$$M'(p)=4p+200\qquad N(p)=120+p$$

De unde

$$i_2(t)=\frac{120}{200}e^{0t}-\frac{20}{200}e^{-100t}=0,6-0,1e^{-100t},A;$$

$$i_2(t)=0,6-0,1e^{-100t},A;$$

$$u_L=L\frac{di_2}{dt}200e^{-100t},V.$$

Concluzii

1. Formula descompunerii este aplicată în cazul oricărei forme a tensiunii, ce apare în schemă.

2. Dacă condiţiile iniţiale diferă de zero, în componenta $N(p)$ se află f.e.m. interne.

3. Dacă $M(p)$ are rădăcini complexe conjugate, atunci componentele, de asemenea, sunt complexe, iar suma lor dă o componentă reală.

4. Dacă tensiunea este sinusoidală $E_m \sin(\omega t + \psi_E)$ imaginea ei fiind $\underline{E}_m \frac{1}{p - j\omega}$ $\left(\underline{E}_m = E_m e^{j\psi_E}\right)$, în formula descompunerii la trecerea la valoarea momentană se ia coeficientul "$j$" pe lângă componenta f.e.m. interne $\left( jLi(0); j\frac{u_C(0)}{p} \right)$, ca astfel, să fie luată în consideraţie componenta liberă, caracterizată de energia înmagazinată în bobină sau în condensator.

5. Dacă tensiunea aplicată are caracter sinusoidal, atunci componentei forţate îi va corespunde rădăcina $p=j\omega$.

**Exemplu**

Se dau: $e(t)=127\sin(\omega t-50°)$ $V$; $R_1=R_2=2$ $\Omega$; $L=9.5$ $mH$; $\omega L=3$ $\Omega$; $\omega=314$ $s^{-1}$.

Se cere să se determine curentul $i(t)$.

Rezolvare:

I etapă: $i(0)= -25,35$ $A$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{127e^{-j50°}}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{127e^{-j50°}}{5e^{-j37°}} = 25,4e^{-j87°}, A$$

$$i(t) = 25,4\sin(\omega t - 87°), A$$

$t=0$ $i(0)= -25,35A$

$$e(t) = \underline{E}_m \frac{1}{p - j\omega}, \quad \underline{E}_m = 127e^{-j50°}, V$$

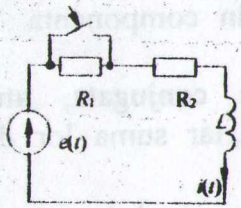



Fig. 26

$$I(p)=\frac{\frac{\underline{E}_m}{p-j\omega}+j\omega Li(0)}{R_2+pL}=$$

$$=\frac{\underline{E}_m+jLi(0)(p-j\omega)}{(p-j\omega)(R_2+pL)}=\frac{N(p)}{M(p)}$$

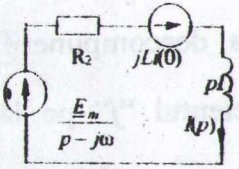



Fig 27

unde $N(p)=\underline{E}_m+jLi(0)(p-j\omega)$,

$M(p)=(p-j\omega)(R_2+pL)$

Rădăcinile ecuației caracteristice

$M(p)=0$; $p_1=j\omega$; $p_2=-\frac{R_2}{L}$

sau $p_1=j314s^{-1}$; $p_2=-210s^{-1}$

II etapă.

$$i(t)=\mathrm{Im}\left[\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2t}\right]=$$

$$=\mathrm{Im}\left[\frac{127e^{j(\omega t-50^\circ)}}{3,61e^{j56^\circ26'}}+\frac{47,1e^{-j83^\circ24'}}{3,61e^{j123^\circ40'}}e^{-210t}\right]=$$

$$=35,2\sin(\omega t-106^\circ20')+13,18\sin 40^\circ16'e^{-210t};$$

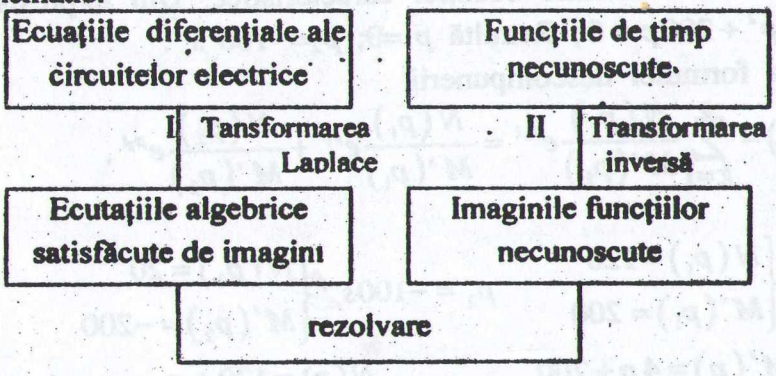
unde:

$$p_1=j314s^{-1}\begin{cases}N(p_1)=127e^{j\omega t}e^{-j50^\circ}\\M'(p)=2pL+(2R-j\omega)\\M'(p_1)=2j314\cdot9,5\cdot10^{-3}+2,2-j314=3,61e^{j56^\circ20'}\end{cases}$$

$$p_2=-210s^{-1}\begin{cases}N(p_2)=47,1e^{-j83^\circ24}\\M'(p_2)=3,61e^{j123^\circ40'}\end{cases}$$

## 2.12. Precizări privind aplicarea transformării Laplace la studiul circuitelor electrice

Aplicarea metodei transformatei Laplace la studiul regimului tranz oriu al circuitelor electrice presupune parcurgerea a două etape principale de calcul. În prima etapă se aplică transformarea Laplace pentru ecuațiile diferențiale ale circuitelor liniare. Ecuațiile algebrice obținute pe baza acestei transformări reprezintă ecuațiile operaționale, respectiv forma operațională a ecuațiilor circuitelor respective. Rezolvând aceste ecuații se obțin imaginile funcțiilor necunoscute. Cea de a doua etapă de calcul constă în determinarea funcțiilor originale corespunzător acestor imagini. Această etapă este în mod obișnuit cea mai dificilă și presupune aplicarea uneia dintre metodele de inversiune (tabelul corespondenței funcțiilor imagine și a funcțiilor origine, formula descompunerii). Etapele de calcul se pot urmări schematic.




**Exemplul 1**

Se consideră circuitul prezentat în fig. 2.8, alcătuit dintr-o rezistență $r$ și o inductanță $L$,

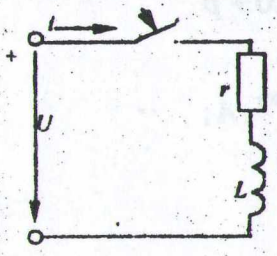



Fig. 2.8

$L$, conectate la o sursa de curent continuu cu tensiunea $U$. Se cere să se determine legea variaţiei curentului $i(t)$ şi tensiunii $U_L(t)$. Date numerice: $U$=100$V$; $r$=25 Ω; $L$=0,02 $H$.

R e z o l v a r e : Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff, în orice moment suma f.e.m., compusă din tensiunea $U$ şi f.e.m. de inducţie $e_L = -L\dfrac{di}{dt}$ este egală cu căderea de tensiune $ir$ sau

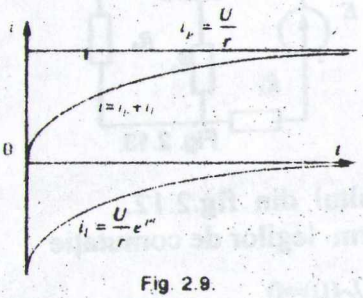


Fig. 2.9.

$$ir + L\frac{di}{dt} = U. \qquad (1)$$

Curentul din circuit constă din curentul soluţiei parţiale şi din curentul soluţiei generale fără termenul liber $i = i_p + i_l$. (2)

O soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1) are expresia

$$i_p = \frac{U}{r} \quad (i_p\text{=const}), \quad i_p = 4A.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$i_l r + L\frac{di_l}{dt} = 0$$

are expresia $i_l = Ae^{pt}$,

unde $A$ - este o constantă arbitrară, iar $p$ - rădăcina ecuaţiei caracteristice. $r + pL = 0$, de unde $p = -\dfrac{r}{L} = -\dfrac{25}{0,02} = -1250\ s^{-1}$.

Constanta A se determină din condiţia iniţială: la începutul procesului tranzitoriu curentul este egal cu zero: $i(0) = \dfrac{U}{r} + A = 0$ ($i(0)$=0, conform primei legi a comutaţiei),

de unde $A = -\dfrac{U}{r} = -4\ A$.

Expresia finală pentru curent va fi

$$i = i_P + i_l = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-pt}\right). \qquad (3)$$

Tensiunea la bornele bobinei are expresia

$$U_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-pt}. \qquad (4)$$

În fig. 2.9 este reprezentată curba curentului în decursul procesului tranzitoriu.

### Exemplul 2

Se consideră schema din fig. 2.10. La un moment dat sursa de energie se deconectează. Se cere să se determine: a) energia acumulată în câmpul magnetic al bobinei după $t$=40$ms$ după deconectarea sursei; b) f.e.m. $e_L$ în momentul comutației. Date numerice: $E$=120 $V$, $R_1$=20 Ω, $R_2$=30 Ω, $L$=1 $H$.

Rezolvare:

1. Se determină valoarea curentului în bobină înainte de comutație

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1} = 6A.$$

2. Se determină rădăcina ecuației caracteristice. La determinarea rădăcinii se aplică metoda impedanței de la intrare pentru circuitul considerat după comutație (fig. 2.11).

$$Z(p) = R_1 + R_2 + pL = 0,$$

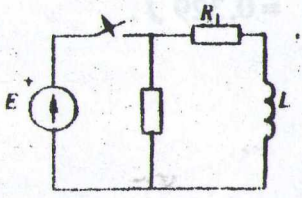


Fig 2.10

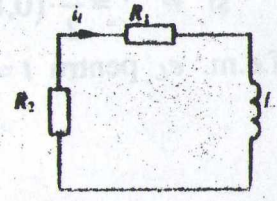


Fig 2.11

de unde $p = -\frac{R_1 + R_2}{L} = -50\ s^{-1}$.

3. Expresia curentului în timpul procesului tranzitoriu

$$i_L^{(t)} = i_p + i_l,$$

unde $i_p$=0.

Componenta permanentă a curentului este egală cu zero deoarece după comutaţie sursa de energie lipseşte în circuit.

Deci $i_L(t) = i_l = Ae^{-50t}$.

4. Se determină constanta de integrare

$$i_L(0) = A = 6A.$$

Astfel avem $i_L(t) = 6e^{-50t}, A.$

5. Energia acumulată în câmpul magnetic al bobinei

$$W^{(m)} = \frac{Li^2}{2},$$

---

$$e_L(0) = -L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = -L\frac{d}{dt}\left(6e^{-50t}\right)\Big|_{t=0} = 300V.$$

pentru $t$=40$ms$

$$i = 6e^{-50(40\cdot10^{-3})} = 0,8115\ A$$

şi $W^{(m)} = \frac{1}{2}\cdot(0,8115)^2 = 0,329\ J.$

6. Valoarea f.e.m. $e_L$ pentru $t = 0$

**Exemplul 3**

Să se determine curentul $i_2(t)$ în procesul de tranziţie aplicând metoda clasică şi metoda operaţională (fig. 2.12). Date numerice: $E$=120 $V$, $L$=$10^{-2}$ $H$, $C$=$10^{-5}$ $F$, $R_1$=75 Ω, $R_2$=25 Ω, $R_3$=50 Ω, $R_4$=100 Ω.

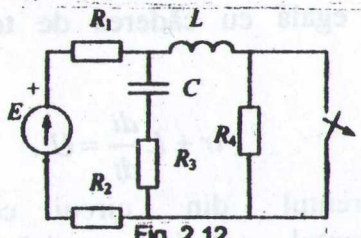


Fig. 2.12.

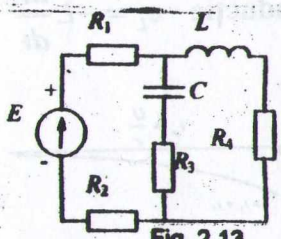


Fig. 2.13.

Rezolvare:

1. Se indică sensurile curenţilor în circuitul din fig.2.12.
2. Se determină condiţiile iniţiale conform legilor de comutaţie

$$i_{2L}(0)=\frac{E}{R_1+R_2}=2A, \quad U_C(0)=0.$$

3. Se scrie ecuaţia caracteristică şi se determină rădăcinile ei

$$Z(p)=R_1+R_2+\frac{\left(\frac{1}{pC}+R_3\right)(pL+R_4)}{pL+R_4+\frac{1}{pC}+R_3}=0,$$

de unde $p_1$= -$10^3$ $s^{-1}$; $p_2=-13\cdot10^3 s^{-1}$.

4. Se scrie ecuaţia diferenţială faţă de curentul $i_2(t)$.

Conform teoremelor lui Kirchhoff pentru schema din fig. 2.13 avem

$$\begin{cases} i=i_1+i_2 & (1)\\ i(R_1+R_2)+i_1R_3+\frac{1}{C}\int i_1dt=E & (2)\\ i(R_1+R_2)+i_2R_4+L\frac{di_2}{dt}=E & (3) \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii primit se rezolvă determinându-se $i_2(t)$. Înlocuind $i = i_1 + i_2$ în ecuaţiile (*2*) şi (*3*), se obţine:

$$(i_1 + i_2)R_{12} + i_1R_3 + \frac{1}{C}\int i_1 dt = E \qquad (4)$$

$$(i_1 + i_2)R_{12} + i_2R_4 + L\frac{di_2}{dt} = E \qquad (5)$$

Din ecuaţia (*5*) avem $i_1 = \dfrac{E - i_2(R_4 + R_{12}) - L\dfrac{di_2}{dt}}{R_{12}}$

şi introducând în ecuaţia (*4*), se obţine:

$$\left[\frac{E - i_2(R_4 + R_{12}) - L\frac{di_2}{dt}}{R_{12}} + i_2\right]R_{12} + \frac{E - i_2(R_4 + R_{12}) - L\frac{di_2}{dt}}{R_{12}}R_3 +$$

$$+ \frac{1}{C}\int\left(\frac{E - i_2(R_4 + R_{12}) - L\frac{di_2}{dt}}{R_{12}}\right)dt = E. \qquad (6)$$

Derivând ecuaţia (6) în raport cu $i_2$, se obţine după înlocuirea valorilor numerice ecuaţia diferenţială neomogenă de ordinul doi:

$$1,5 \cdot 10^{-5}\frac{d^2i_2}{dt^2} + 21 \cdot 10^{-2}\frac{di_2}{dt} + 200i_2 = 200, \qquad (7)$$

5. Rezolvarea ecuaţiei (*7*):

a) o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (componenta permanentă): $i_2 = i_{2p} = const$, $\dfrac{di_{2p}}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2i_{2p}}{dt^2} = 0$.

rezultă $i_{2p} = \dfrac{200}{200} = 1A$.

b) soluţia generală a ecuaţiei omogene (componenta liberă):

$i_2 = i_{2l}$

$$1{,}5\cdot10^{-5}\frac{d^2i_{2l}}{dt^2}+21\cdot10^{-2}\frac{di_{2l}}{dt}+200i_{2l}=0\,.$$

$$1{,}5\cdot10^{-5}p^2+21\cdot10^{-2}p+200=0. \qquad (8)$$

Soluțiile ecuației (8) care reprezintă ecuația caracteristică a circuitului din fig. 4.6 sunt

$$p_1=-10^3\,s^{-1},\quad p_2=-13\cdot10^3\,s^{-1}.$$

Așadar $$i_{2l}=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t},$$

unde $A_1$ și $A_2$ sunt constantele de integrare. Astfel soluția generală a ecuației diferențiale neomogene are expresia

$$i_2(t)=i_{2p}+i_{2l}=1+A_1e^{-10^3t}+A_2e^{-13\cdot10^3t}. \qquad (9)$$

6. Se pun condițiile inițiale pentru a determina constantele de integrare $A_1$ și $A_2$.

$$i_2(0)=A_1+A_2, \qquad (10)$$

Se înlocuiește $\frac{d}{dt}\to p$

$$\frac{di_2}{dt}\Big|_{t=0}=-10^3A_1-13\cdot10^3A_2. \qquad (11)$$

unde $i_2(0) = 2$; $\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = ?$

La determinarea $\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}$ se consideră circuitul după comutaţie la t=0 şi se alcătuieşte sistemul de ecuaţii conform teoremelor lui Kirckhhoff: din acest sistem se obţine: $i_2'(0) = -10^3$.

Introducând valorile $i_2(0)=2$ şi $\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = -2 \cdot 10^4$ în ecuaţiile (*10*) şi (*11*) rezultă din rezolvarea sistemului de ecuaţii $A_2=1,58$; $A_1= -0,58$.

Expresia curentului $i_2(t)$.

$$i_2(t) = 1 - 0,58e^{-10^3 t} + 1,58e^{-13 \cdot 10^3 t}. \qquad (13)$$

Metoda operaţională.

Prima etapă. Determinarea imaginii funcţiei căutate sub forma raportului a două polinoame.

1. Alcătuirea schemei echivalente folosind valorile iniţiale independente determinate după legile comutaţiei (fig. 2.14).

$$E = \frac{E}{p}, U_L = L\frac{di_1}{dt} = I_1(p)pL - i_1(0)L,$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int i_1 dt = \frac{I_1(p)}{pC} + \frac{U_C(0)}{p}. \qquad (14)$$

2. Determinarea expresiei imaginii curentului $I_2(p)$.

Pentru circuitul din fig. 2.14 se aplică metoda potenţialelor de noduri (circuitul se consideră ca circuit de curent continuu). Conform acestei metode avem

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p}\frac{1}{R_{12}} + \frac{U_C(0)}{p}\frac{1}{\left(\frac{1}{pC} + R_3\right)} - Li_2(0)\frac{1}{R_4 + pL}}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{\frac{1}{pC} + R_3} + \frac{1}{R_4 + pL}}$$

$$I_2(p)=\frac{Li_2(0)+U_{ab}(p)}{R_4+pL}=\frac{3\cdot10^{-5}p^2+1{,}2\cdot10^{-1}p+200}{p\left(1{,}5\cdot10^{-5}p^2+21\cdot10^{-2}p+200\right)}=\frac{N(p)}{M(p)}. \quad (15)$$

3. Se determină rădăcinile ecuației caracteristice din $M(p)=0$

$$p\left(1{,}5\cdot10^{-5}p^2+21\cdot10^{-2}p+200\right)=0 \quad (16)$$

de unde $p_1=0$, $p_2=-10^3 s^{-1}$, $p_3=-13\ 10^3 s^{-1}$.

Etapa a doua. Trecerea de la imaginea-curentului $I_2(p)$ la originalul $i_2(t)$ se aplică formula descompunerii.

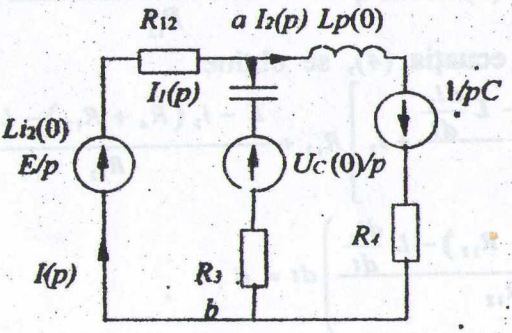



Fig. 2.14

$$i_2(t)=\sum_{k=1}^{3}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}=\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2 t}+\frac{N(p_3)}{M'(p_3)}e^{p_3 t}, \quad (17)$$

unde

$$M'(p)=\left[p\left(1{,}5\cdot10^{-5}p^2+21\cdot10^{-2}p+200\right)\right]'= \quad (18)$$

$$=4{,}5\cdot10^{-5}p^2+4{,}2\cdot10^{-1}p+200,$$

$$p_1=0\begin{cases}N(p_1)=200\\M'(p_1)=200\end{cases}$$

$$p_2 = -10^3 s^{-1} \begin{cases} N(p_2) = 1{,}1 \cdot 10^2 \\ M'(p_2) = -1{,}75 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$p_3 = -13 \cdot 10^3 s^{-1} \begin{cases} N(p_3) = 23{,}45 \cdot 10^2 \\ M'(p_3) = 36{,}6 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$i_2(t) = \frac{200}{200} e^{0t} - \frac{1{,}1 \cdot 10^2}{1{,}75 \cdot 10^2} e^{-10^3 t} + \frac{36{,}6 \cdot 10^2}{23{,}45 \cdot 10^2} e^{-13 \cdot 10^3 t} = \tag{19}$$

$$\doteq 1 - 0{,}58 e^{-10^3 t} + 1{,}58 e^{-10^3 t}$$

Astfel, se obține: $i_2(t) = 1 - 0{,}58 e^{-10^3 t} + 1{,}58 e^{-10^3 t}$. (20)

Graficul dependenței $i_2(t)$ este prezentat în fig. 2.15. Calculele sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

| Timpul Funcția | $t_1=0$ | $t_2 = \frac{3}{\lvert p_1 \rvert}$ | $t_3 = \frac{3}{\lvert p_1 \rvert}$ | $t_4 = \frac{3}{\lvert p_1 \rvert}$ |
|---|---|---|---|---|
| $i_p=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $-0{,}58e^{-10^3 t}$ | -0,58 | -0,215 | -0,0793 | -0,0293 |
| $1{,}58e^{-13 \cdot 10^3 t}$ | 1,58 | 0,001 | 0,0003 | 0,0007 |
| $i=i_p+i_l$ | 2 | 0,786 | 0,921 | 0,97 |

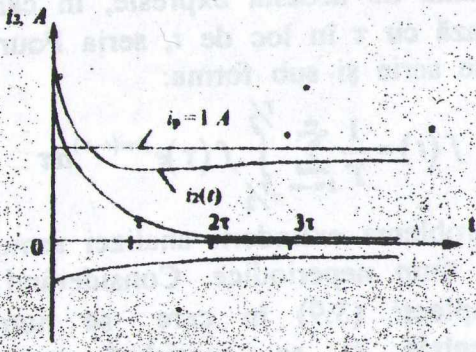



Fig. 2.15

## 3. METODA DE CALCUL PE BAZA TRANSFORMĂRII FOURIER. ANALIZA SPECTRALĂ

O funcţie periodică de timp $f(t)$, de perioadă $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$, se poate dezvolta în serie Fourier, sub forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left( A_{km} \cos k\frac{2\pi}{T}t + B_{km} \sin k\frac{2\pi}{T}t \right). \qquad (3.1)$$

Această dezvoltare este posibilă dacă funcţia $f(t)$ este netedă pe porţiuni în interiorul unei perioade (condiţiile lui Dirichlet), condiţii satisfăcute obişnuit de funcţiile ce intervin în practică. Primul termen $A_0$ reprezintă componenta continuă a funcţiei periodice, iar termenii de pulsaţie $k\omega$ sunt armonicile de ordenul $k$ în cosinus şi sinus. Coeficienţii seriei Fourier au următoarele expresii:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt, \qquad (3.2)$$

$$A_{km} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \cos k\frac{2\pi}{T}t\,dt, \qquad (3.3)$$

$$B_{km} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \sin k\frac{2\pi}{T}t\,dt. \qquad (3.4)$$

Componenta continuă $A_0$ din relaţia (3.2) reprezintă de fapt valoarea medie a funcţiei periodice pe timp de o perioadă; dacă $A_0 = 0$ funcţia $f(t)$ este numită funcţie alternativă. Seria Fourier se poate scrie şi sub forma restrânsă, frecvent întâlnită în electrotehnică:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k\right)\right), \qquad (3.5)$$

în care $C_{km} = \sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}$ este amplitudinea armonicii de ordinul "$k$" (pentru $k$=1 se vorbeşte de armonica 1 sau de fundamentală), iar $\psi_k = arctg \frac{A_{km}}{B_{km}}$.

Există diferite metode pentru determinarea coeficienţilor seriei Fourier. Dacă funcţia este dată prin graficul ei, fiind de exemplu ridicată pe cale experimentală, se aplică metode aproximative grafo-analitice.

Este util să se releve faptul că dezvoltarea în serie Fourier se simplifică dacă funcţiile periodice considerate prezintă anumite simetrii, respectiv satisfac unele condiţii.

În cazul unei funcţii periodice la care este îndeplinită condiţia $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$, numită şi funcţie alternativă simetrică, în seria Fourier intervin numai armonice impare.

Dacă $f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$, în seria Fourier intervin numai armonice în cosinus şi componenta continuă. Există numai armonice în sinus dacă $f(t) = -f(T - t)$.

În practică se consideră un număr finit de termeni ai seriei Fourier, în funcţie de problema analizată (în general $k$<20).Reprezentarea grafică a amplitudinilor şi fazelor armonice caracteristică amplitudine-frecvenţă (sau spectrul amplitudinilor), respectiv caracteristica fază - frecvenţă (sau spectrul fazelor).

Seria Fourier se poate scrie şi în formă complexă, respectiv cu termeni complecşi. Ţinând seama de identitatea lui Euler $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$, rezultă:

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}\right),$$

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}\right),$$

astfel, că termenul general al seriei Fourier devine :

$$B_{km}\sin k\omega t + A_{km}\cos k\omega t = \underline{C}_k e^{jk\omega t} + \underline{C}_{-k} e^{-jk\omega t},$$

unde s-au introdus notaţiile:

$$\underline{C}_k = \frac{1}{2}\left(A_{km} - jB_{km}\right) \quad \text{şi} \quad \underline{C}_{-k} = \frac{1}{2}\left(A_{km} + jB_{km}\right), \qquad (3.6)$$

$\underline{C}_k$ şi $\underline{C}_{-k}$ sunt mărimi complex conjugate ($\underline{C}_{-k} = \underline{C}_k^*$), iar modulul $|\underline{C}_k|$ reprezintă jumătate din amplitudinea armonicii respective, $|\underline{C}_k| = \frac{1}{2} B_{km}$.

Seria Fourier cu termeni complecşi se scrie, deci sub forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underline{C}_k e^{jk\omega t} + \underline{C}_{-k} e^{-jk\omega t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega t}. \qquad (3.7)$$

Valorilor negative ale lui $k$ în acestă expresie le corespunde formal pulsaţiile negative. Dacă se cunoaşte funcţia $f(t)$, coeficenţii $\underline{C}_k$ se pot calcula pe baza relaţiei:

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt. \qquad (3.8)$$

Ţinând seama de această expresie, în care variabila de integrare se notează cu $\tau$ în loc de $t$, seria Fourier cu termeni complecşi (3.7) se scrie şi sub forma:

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{jk\omega(t-\tau)} d\tau. \qquad (3.9)$$

Se pune problema extinderii analizei armonice (Fourier) pentru funcţii de timp neperiodice. Considerând seria Fourier cu termenii complecşi (3.9) în care se notează cu "$\omega_1$" pulsaţia fundamentală şi se consideră pentru efectuarea integralei intervalul de o perioadă cuprins între $-T/2$ şi $+T/2$ se obţine expresia:

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)e^{jk\omega_1(t-\tau)}d\tau. \qquad (3.10)$$

Considerarea unor funcţii periodice înseamnă a presupune perioada tinzând către infinit, $T\to\infty$. Notând în acest caz $k\omega_1\to\omega$, $\omega_1\to\Delta\omega$ şi $\frac{1}{T}=\frac{\omega_1}{2\pi}\to\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ relaţia (3.10) devine

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty}\Delta\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau. \qquad (3.11)$$

Pentru $T\to\infty$, respectiv $\Delta\omega\to 0$, rezultă la limită expresia:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{j\omega(t-\tau)}d\tau, \qquad (3.12)$$

reprezentând integrala Fourier în formă complexă.

Separând părţile reală şi imaginară în relaţia (3.12) se obţine:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau+j\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\sin\omega(t-\tau)d\tau\right] \qquad (3.13)$$

Funcţia $\sin\omega(t-\tau)$ fiind o funcţie impară de ω, partea imaginară din relaţia (3.13) se anulează, obţinându-se:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau, \qquad (3.14)$$

unde s-a ţinut seama că funcţia $\cos\omega(t-\tau)$ este o funcţie impară de "ω", astfel că integrarea în raport cu "ω" se poate limita la intervalul (0, +∞), expresia fiind înmulţită în acest caz cu 2. Relaţia (3.14) reprezintă integrala Fourier în formă reală.

Este important de relevat faptul că pentru ca $f(t)$ să poată fi dezvoltată în integrală Fourier trebuie să satisfacă condiţiile lui Dirichlet şi, de asemenea, funcţia trebuie să fie

absolut integrabilă în intervalul $(-\infty, +\infty)$, cu alte cuvinte este nevoie ca integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty, \qquad (3.15)$$

să fie convergentă, ceea ce presupune anularea funcției pentru $t \to \pm\infty$. În practică, este vorba de funcții (curenți și tensiuni) care se anulează suficient de repede pentru $t \to \infty$.

## 3.1. Transformata Fourier

Introducând funcția complexă:

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega t} d\tau,$$

respectiv

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \qquad (3.16)$$

integrala Fourier (3.12) devine

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\omega. \qquad (3.17)$$

Funcția $\underline{F}(j\omega)$ se numește transformata Fourier sau imaginea Fourier. Se poate considera că ea corespunde unei reprezentări a funcției $f(t)$ în domeniul frecvențelor.

Pe baza integralei Fourier (3.17) o funcție de timp $f(t)$ neperiodică se poate interpreta ca suma a unui șir infinit de funcții (componente) armonice elementare, reprezentate în complex sub forma $\frac{1}{2\pi}\underline{F}(j\omega)d\omega e^{j\omega t}$, având frecvențe infinit apropiate. Modulul transformatei Fourier $|\underline{F}(j\omega)|$ reprezintă câtul dintre amplitudinea spectrală elementară $\frac{1}{2\pi}\underline{F}(j\omega)d\omega$ și intervalul de frecvență $df = d\omega/2\pi$ la care se referă, cu

alte cuvinte densitatea spectrală a amplitudinilor. Datorită acestui fapt, transformata Fourier se numeşte şi densitatea spectrală complexă a funcţiei f(t), iar uneori funcţie (caracteristică) spectrală.

Transformata Fourier prezintă un interes cu caracter mai general în electrotehnică. Reprezentând grafic modulul transformatei Fourier, $(\underline{F}(j\omega))$ se obţine spectrul funcţiei $f(t)$. Un astfel de spectru este continuu spre deosebire de spectrele discrete corespunzătoare seriei Fourier.

O relaţie importantă în care intervine densitatea spectrală este teorema lui Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{F}(j\omega)|^2 d\omega , \qquad (3.18)$$

în care $|\underline{F}(j\omega)|^2$ se numeşte şi densitatea spectrală de energie sau spectrul de energie al funcţiei f(t).

În anumite probleme este util să se caracterizeze o funcţie de timp prin funcţia de autocorelaţie, definită sub forma:

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) f(t) dt .$$

Această funcţie se pune în legătură cu densitatea spectrală de energie pe baza relaţiei

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{F}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega .$$

care relevă faptul că densitatea spectrală de energie $|\underline{F}(j\omega)|^2$ reprezintă transformata Fourier a funcţiei de autocorelaţie. Funcţia de autocorelaţie, care se poate determina şi pe cale experimentală, prezintă un interes deosebit mai ales în analiza semnalelor aleatoare.

## 3.2. Legea lui Ohm. Schemele echivalente a caracteristicilor spectrale (spectrele de frecvenţă)

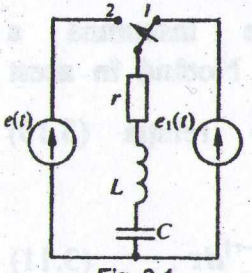


Fig. 3.1.

Se consideră circuitul r,L,C din fig. 3.1, care este conectat la sursa de f.e.m. $e_1$, iar la momentul $t=0$ reconectat la sursa de f.e.m. $e(t)$.

Se determină spectrul f.e.m. $e(t)$ prin aplicarea relaţiei (3.16):

$$E(j\omega)=\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}\cdot e(t)dt=E(p). \quad (3.19)$$

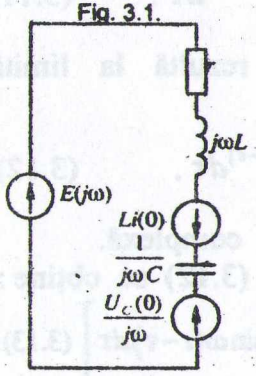


Fig. 3.2.

Legea lui Ohm pentru spectrele de frecvenţă la condiţii iniţiale ce diferă de zero se obţine sub forma:

$$\underline{I}(j\omega)=\frac{\underline{E}(j\omega)+L\cdot i(0)-\dfrac{U_C(0)}{j\omega}}{r+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}. \quad (3.20)$$

Numitorul expresiei (3.20) reprezintă impedanţa complexă a circuitului faţă de bornele de alimentare:

$$\left(\underline{Z}(j\omega)=r+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right).$$

Formula (3.20) permite să se determine spectrul de frecvenţă al curentului $I(j\omega)$, iar apoi să se determine curentul în procesul tranzitoriu aplicând formula:

$$i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega. \quad (3.21)$$

Expresia (3.20) permite să se alcătuiască schema echivalentă complexă (schema echivalentă pentru spectrele de frecvenţă) ce este reprezentată în fig. 3.2.

La calculul proceselor tranzitorii prin metoda spectrală, se poate mai întâi să se alcătuiască schema echivalentă complexă şi apoi aplicând această schemă să se determine spectrele de frecvenţă ale curenţilor şi tensiunilor.

Din (3.20) se poate, de asemenea, să se obţină legea lui Ohm pentru spectrele de frecvenţă în cazul condiţiilor iniţiale egale cu zero, adică:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{E}(j\omega)}{Z(j\omega)}. \qquad (3.22)$$

### 3.3. Algoritmul de calculul al curenţilor şi tensiunilor prin metoda integralei Fourier

1. Pentru circuitul dat se alcătueşte schema echivalentă complexă.

2. Cu ajutorul schemei echivalente se determină spectrele de frecvenţă ale curenţilor sau tensiunilor prin aplicarea unei metode de calcul a circuitelor electrice în regim permanent (metoda curenţilor de contururi, metoda potenţialelor nodale etc).

De asemenea, se poate să se aplice principiul superpoziţiei aducând condiţiile iniţiale la zero.

3. La determinarea originalului poate fi aplicată formula descompunerii sau tabelul de corespondenţă considerând că

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)}. \qquad (3.23)$$

Atunci

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(j\omega_k)}{F_2'(j\omega_k)} e^{j\omega_k t},$$

unde: $F_2'(j\omega)$ - este derivata funcţiei $F_2(j\omega)$ în raport cu variabila $j\omega$;

$j\omega_k$ - rădăcinile ecuaţiei caracteristice.

**Exemplul 3.1.** Să se determine curentul şi tensiunea la bornele condesatorului la conectarea circuitului cu $r$, $C$ la tensiunea de formă exponenţială:

$$u(t)=\begin{cases} Ue^{-\alpha t} \geq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases},$$

unde $\alpha > 0$.

Rezolvare. Funcţia $u(t)$ este absolut integrabilă în limite infinite, deoarece integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} |u(t)|\,dt + \int_{0}^{\infty} |u(t)|\,dt = 0 + \int_{0}^{\infty} Ue^{-\alpha t}\,dt = \frac{U}{\alpha}$$

este determinată la orice $\alpha \neq 0$.

Aplicând tabelul de corespondenţă se scrie spectrul de frecvenţă, ce corespunde aceste-i funcţii

$$U(j\omega)=\left(\frac{U}{p+\alpha}\right)_{p=j\omega} = \frac{U}{\alpha+j\omega} = U(\omega)e^{j\psi(\omega)} = \frac{Ue^{-j\arctg\frac{\omega}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},$$

de unde se obţine caracteristi ca amplitudine - fază în funcţie de frecvenţa a tensiunii aplicate

$$U(\omega)=\frac{U}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}; \quad \psi(\omega)=-arctg\frac{\omega}{\alpha}.$$

De aici rezultă că o conectare a circuitului la o tensiune aperiodică $u(t)$ poate fi considerată ca o conectare la un număr mare de oscilaţii armonice elementare, ale căror frecvenţe variază treptat de la $-\infty$ până la $+\infty$. În fig. 3.3 sunt reprezentate curbele $u(\omega)$ şi $\psi(\omega)$ în funcţie de $\omega$ atunci când $\omega$ variază de la "0" până la $\infty$.

În fig. 3.4 este prezentată caracteristica $u(j\omega)$ ceea ce reprezintă hodograful funcţiei complexe $u(j\omega)$ la variaţia pulsaţiei "$\omega$" de la 0 până la $\infty$.

Impedanţa complexă a circuitului este

$$Z(j\omega)=r+\frac{1}{j\omega C}=\frac{1+jr\omega C}{j\omega C}.$$

Deoarece condiţiile iniţiale sunt nule conform legii lui Ohm curentul spectral de frecvenţă este:

$$I(j\omega)=\frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}=\frac{Uj\omega C}{(j\omega+\alpha)(j\omega rC+1)}=\frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)}$$

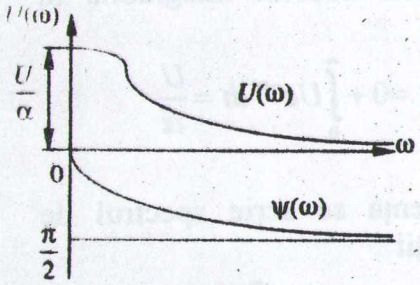



Fig. 3.3.

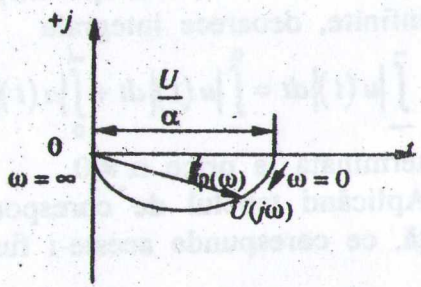



Fig. 3.4.

Aplicând teorema descompunerii se determină legea de variaţie a curentului $i(t)$:

$$i(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(j\omega_k)}{F_2(j\omega_k)}e^{j\omega_k t},$$

unde $F_1(j\omega)=j\omega CU$, $F_2(j\omega)=(j\omega+\alpha)(j\omega rC+1)$,

$$F_2'(j\omega)=-2j\omega rC+1+\alpha rC.$$

Rădăcinele ecuaţiei caracteristice rezultă din $F_2(j\omega)=0$

$$(j\omega+\alpha)(j\omega rC+1)=0;\quad j\omega_1=-\alpha;\quad j\omega_2=-\frac{1}{rC}.$$

Atunci

$$j\omega_1=-\alpha\begin{cases}F_1(j\omega_1)=-\alpha CU;\\ F_2'(j\omega_1)=1-rC\alpha;\end{cases}\qquad j\omega_2=-\frac{1}{rC}\begin{cases}F_1(j\omega_2)=-\frac{U}{r};\\ F_2'(j\omega_1)=-1+rC\alpha.\end{cases}$$

Deci

$$i(t)=\frac{F_1(j\omega_1)}{F_2'(j\omega_1)}e^{j\omega_1 t}+\frac{F_1(j\omega_2)}{F_2'(j\omega_2)}e^{j\omega_2 t}=\frac{-\alpha CU}{1-rC\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{-U/r}{-1+rC\alpha}e^{-\frac{1}{rC}t}=$$

$$=\frac{UC}{\alpha rC-1}\left(\alpha e^{-\alpha t}-\frac{1}{rC}e^{-\frac{t}{rC}}\right)$$

sau $$i(t)=\frac{UC}{\alpha rC-1}\left(\alpha e^{-\alpha t}-\frac{1}{rC}e^{-\frac{t}{rC}}\right).$$

Tensiunea la bornele condesatorului are expresia

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt=u_{Cf}+u_{Cl}=\frac{U}{\alpha rC-1}\left(-e^{-\alpha t}+e^{-\frac{t}{rC}}\right).$$

**Exemplul 3. 2.** Se consideră circuitul din fig.3.5. Se cere să se determine curentul $i_1$ la închiderea întrerupătorului, dacă: $e_2=100\sin(314t+60°), V; e_3=200e^{-5t}, V;$ $r_1 = 10\ \Omega;$ $L = 300m\ H;$ $r_2=20\ \Omega;$ $C=100\ \mu F;$ $r_3=30\ \Omega.$

R e z o l v a r e . Se calculează regimul până la comutație (fig. 3.5)

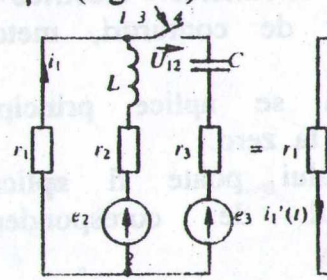



Fig. 3.5

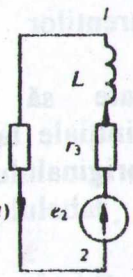



Fig 3.6

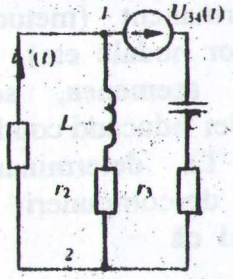



Fig. 3.7

$$i_2(t)=i_1(t)=1,01\sin(314t-12°20'), A$$

$$U_{12}(t)=10,1\sin(314t-12°20'), V$$

Problema se rezolvă prin metoda aportării la condiții inițiale nule. Cu acest scop se determină tensiunea la bornele întrerupătorului

$$U_{34}(t)=U_{12}(t)-e_3(t)=10,1\sin(314t-12°20)-200e^{-5t}, V$$

Spectrul de frecvenţă al tensiunii $u_{34}$ are expresia

$$u_{34}(j\omega) = 2{,}16\frac{-j\omega+1435}{314^2+(j\omega)^2} - \frac{200}{5+j\omega}.$$

Se calculează procesul tranzitoriu din fig. 3.7:

$$I_1(j\omega) = \frac{u_{34}(j\omega)}{\left(\underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\right)}\frac{\underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} =$$

$$= \frac{j\omega(0{,}3j\omega+20)\left\{2{,}16(-j\omega+1435)(5+j\omega)-200\left[(j\omega)^2+314^2\right]\right\}}{(5+j\omega)(314-\omega)(314+\omega)12(j\omega+105{,}3)(j\omega+236{,}2)}.$$

Aplicând teorema descompunerii, se determină originalul curentului $i_1'(t)$

$$i_1'(t) = 0{,}1942\sin(314t+31°) + 0{,}0661e^{-5t} + 1{,}685e^{-105{,}8t} - 6{,}87e^{-236{,}2t}, A$$

Aplicând metoda suprapunerii se determină curentul $i_1$ în procesul tranzitoriu.

$$i_1(t) = -i_1'(t) + i_1''(t) = -0{,}88\sin(314t-21{,}02°) + 0{,}0661e^{-5t} + 1{,}685e^{-105{,}8t} - 6{,}87e^{-236{,}2t}, A$$

După cum se poate observa din exemplele considerate calculele proceselor tranzitorii prin metoda operaţională şi prin metoda integralei Fourier sunt destul de asemănătoare. Metoda integralei Fourier are unele avantaje la calculul proceselor tranzitorii prin aplicarea metodelor aproximative.

### 3.4. Metoda apoximativă de determinare a originalului prin aplicarea caracteristicii de frecvenţă (metoda trapezului)

Este ştiut că spectrul $f(t)$ se determină prin aplicarea integralei Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega, \qquad (3.24)$$

unde $F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega) = F(\omega)e^{j\psi(\omega)}$.

Expresia (3.24) poate fi pusă sub următoarea formă

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\cos\omega t-F_2\sin\omega t)d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(F_1\sin\omega t-F_2\cos\omega t)d\omega.$$

Considerând caracteristica de frecvenţă obţinută numai pentru partea reală:

$$F_1\sin\omega t+F_2\cos\omega t=0 \quad \text{sau} \quad F_1\sin\omega t=-F_2\cos\omega t.$$

Înlocuind se obţine:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_1\cos\omega t d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_2\sin\omega t d\omega. \qquad (3.25)$$

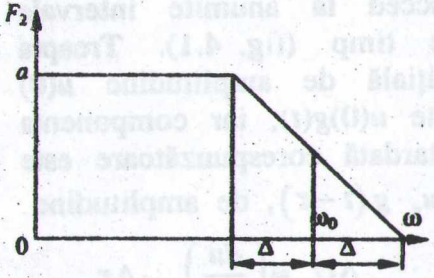


Fig. 3.8.

Se consideră că este dată caracteriastica de frecvenţă $\dot{F}_2(\omega)$ reprezentată în fig. 3.8.

Se calculează $f(t)$.

$$F_2(0)=a;\quad \frac{dF_2}{d\omega}=-\frac{a}{2\Delta}$$

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F_2\sin\omega t d\omega=-\frac{2}{\pi t}\int_0^{\infty}\frac{dF_2}{d\omega}\cos\omega t d\omega-\frac{2}{\pi t}F_2(0)=$$

$$=\frac{a}{\pi(\Delta t)^2}\left[\sin(\omega_0+\Delta t)t-\sin(\omega_0-\Delta t)t\right]-\frac{2a}{\pi t}=\frac{a}{\pi\Delta t}.$$

Deci

$$f(t)=\frac{a}{\pi\Delta t}. \qquad (3.26)$$

## 4. Metoda integralei Duhamel

La calculul proceselor tranzitorii în circuite electrice liniare cu tensiuni de formă diferită (impuls) se poate aplica integrala Duhamel.

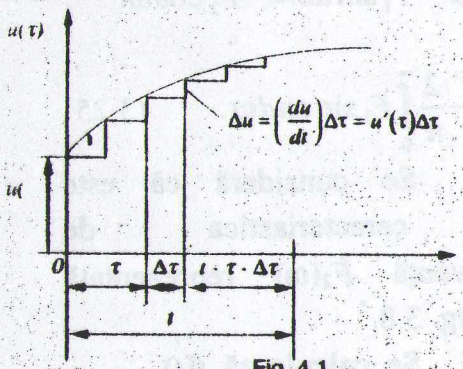


Fig. 4.1

În cadrul metodei, mărimea de excitație. $u(t)$ se aproximează printr-o sumă de componente treaptă, ce se succed la anumite intervale de timp (fig. 4.1). Treapta inițială de amplitudine $u(0)$ este $u(0)g(t)$, iar componenta retardată corespunzătoare este $\Delta u_\tau \cdot g(t-\tau)$, de amplitudine

$$\Delta U_\tau \approx \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\tau} \cdot \Delta\tau .$$

Mărimea de excitație se poate deci aproxima sub forma:

$$i(t) \approx u(0)g(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \Delta u_\tau g(t-\tau) \approx u(0)g(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\tau} \Delta\tau g(g-\tau) .$$

Aproximația excitației este cu atât mai bună cu cât intervalul de succesiune a treptelor este mai mic. Trecând la limită și considerând intervale elementare $\Delta\tau \to d\tau$, amplitudinea treptei elementare retardate devine $\Delta u = u'(\tau)d\tau$. Se obține astfel, expresia exactă a mărimii de excitație $u(t)$, în care suma se transformă în integrală, respectiv.

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau , \qquad (4.1)$$

unde: $u(0)g(t)$ - este mărimea curentului la acțiunea tensiunii $u(0)$, iar $g(t)$ - este conductanța de tranziție, ce corespunde curentului la acțiunea tensiunii $U$=1V,

$\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau$ - este curentul obţinut prin suprapunerea răspunsurilor corespunzătoare componentelor mărimii de excitaţie $u(t)$, $u'(\tau)$ - este derivata funcţiei $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\tau}$, $g(t-\tau)$ - este conductanţa de tranziţie retardată unde "$t$" se înlocuieşte prin $(t-\tau)$.

### 4.1. Algoritmul de calcul prin metoda integralei Duhamel

Calculul prin integrala Duhamel constă din patru etape:

1. Se determină conductanţa de tranziţie $g(t)$ pentru circuitul studiat. Conductanţei de tranziţie îi corespunde curentul circuitului dat în procesul tranzitoriu la acţiunea tensiunii aplicate de $U=1$V, determinat prin metoda clasică sau operaţională.

2. Se determină $g(t-\tau)$ prin înlocuirea $t$ cu $(t-\tau)$ în expresia $g(t)$.

3. Se determină $u'(t)$ calculând derivata funcţiei $u(t)$ şi înlocuind $t$ prin $\tau$ $\left(u'(\tau)=\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\tau}\right)$.

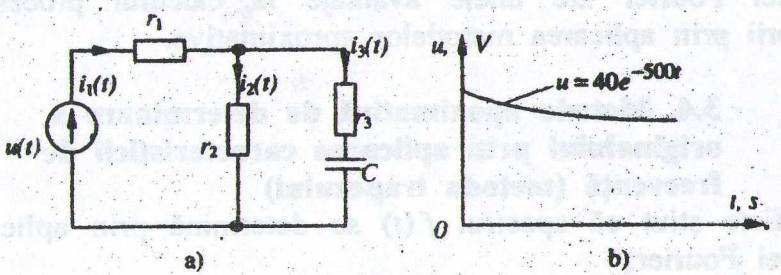



Fig. 4.2.

4. Se introduc expresiile obţinute în relaţia (4.1) şi se rezolvă integrala în raport cu variabila, iar apoi se determină intervalele respective.

**Aplicaţia 4.1.** Se consideră circuitul din fig. 4.2 la care $u(t) = 40e^{-500t}$ V; $r_1 = r_2 = 10\ \Omega$, $r_3 = 5\ \Omega$; $C = 100\ \mu F$. Se cere să se calculeze curentul $i(t)$ în decursul procesului tranzitoriu.

**Rezolvare.** Conform integralei Duhamel se poate scrie:

$$i_1(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau . \qquad (4.2)$$

1. Se determină conductanţa de tranziţie $g(t)$:

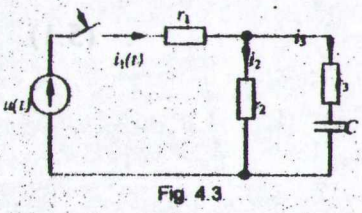


Fig. 4.3

$g(t) = i_1(t)$ la $U$=1$V$ (fig.4.2).

Conform metodei clasice avem $i_1(t) = i_{1f} + i_{1l}$

unde $$i_{1f} = \frac{u}{r_1 + r_2} = \frac{1}{20} A;$$

$$i_{1l} = Ae^{pt};$$

$$Z(p)=0;$$

$$r_1 + \frac{r_2\left(r_3 + \frac{1}{pC}\right)}{r_2 + r_3 + \frac{1}{pC}} = 0 ; p = -10^3 s^{-1}\ i_1(t) = \frac{1}{20} + Ae^{-10^3 t}$$

pentru $t$=0 $\quad i_1(0) = \frac{1}{20} + A \qquad A = i_1(0) - \frac{1}{20}.$

Se determină $i_1(0)$ din ecuaţiile alcătuite prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff la momentul $t$=0 (după comutaţie):

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) & (4.3) \\ i_1(0) r_1 + i_2(0) r_2 = u & (4.4) \\ i_3(0) r_3 + u_C(0) - i_2(0) r_2 = 0 & (4.5) \end{cases}$$

Luând în considerație că $U_C(0)=0$ din (4.5) obținem $i_3(0)=2i_2(0)$.

Din relația (4.3) $i_1(0)=3i_2(0)$, iar din relația (4.4)

$$i_2(0) = \frac{1}{40} A \,.\; i_1(0) = 3i_2(0) = \frac{3}{40} A$$

și

$$A = i_1(0) - \frac{1}{20} = \frac{3}{40} - \frac{1}{20} = \frac{1}{40} A \,.$$

Deci

$$g(t) = i_1(t) = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} e^{-10^3 t} .$$

2) Se determină $g(t-\tau)$

$$g(t) = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} e^{-10^3 (t-\tau)} .$$

3) Se determină $U'(\tau)$ și $U(0)$

$$U'(\tau) = \frac{d}{dt}\left(40e^{-500t}\right)\Big|_{t=\tau} = -2 \cdot 10^4 e^{-500\tau} ; \quad U(0)=40 \; V$$

4) Introducând expresiile obținute în (4.2), rezultă

$$i(t) = 40\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} e^{-10^3 t}\right) + \int_0^t \left(-2 \cdot 10^4 e^{-500\tau}\right)\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} e^{10^3 (t-\tau)}\right) dt =$$

$$= 2 + e^{-1000t} + e^{-500t} - 2 + e^{-1000t} = e^{-500t} + 2e^{-1000t}$$

$$i(t) = e^{-500t} + 2e^{-1000t} , A . \qquad (4.6)$$

## 5. Metoda variabilelor de stare

Această metodă permite calculul proceselor tranzitorii în circuite liniare pe baza unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. În aceste ecuații ca variabile intervin variabilele de stare - mărimi ale căror valori inițiale sunt necesare pentru calculul acestuia, respectiv pentru determinarea evoluției sistemului după momentul inițial, ($t \geq 0$). Aceste mărimi sunt curenții în bobine și tensiunile condensatoarelor, care satisfac condiția de continuitate pentru $t=0$.

Aplicarea metodei variabilelor de stare parcurge în două etape:

1) În prima etapă se alcătuiește sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi și se determină derivatele respective în funcție de anumite mărimi.

2) În a doua etapă se rezolvă acest sistem prin aplicarea metodei numerice de integrare a ecuațiilor diferențiale ce se bazează pe ideea aproximației rezolvării la pasul "$k$" prin aplicarea informației de la pasul precedent (dezvoltarea în serie Tayleur, metoda Euler, metoda Runge - Kutta, metodele Adams etc).

**Aplicația 5.1.**

Se consideră circuitul din fig. 5.1 la care: $e(t)=141\sin(314+90°)\ V$; $I=5\ A$; $r_1=40\ \Omega$; $r_2=100\ \Omega$; $L_1=0{,}1\ H$;

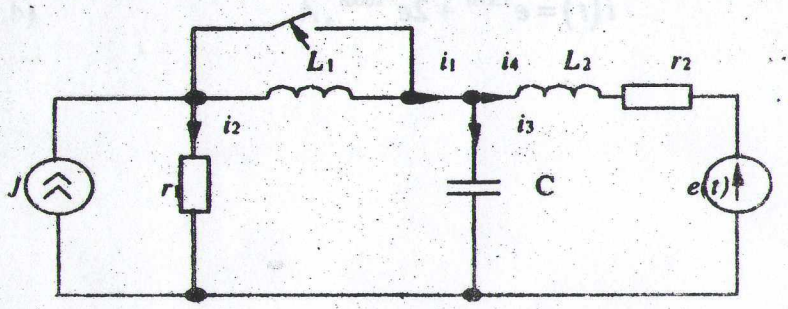



Fig. 5.1.

$L_2$=0,08 $H$; $C$=100 $\mu F$. Să se calculeze $i_1(t)$ la procesul tranzitoriu.

**Rezolvare:**

Conform teoremelor lui Kirchhoff pentru circuitul din fig. 5.1 (schema se consideră după comutație), avem

$$\begin{cases} I - i_2 - i_1 = 0 \\ i_1 - i_3 - i_4 = 0 \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} + u_C - i_2 r_1 = 0 \\ L_2 \dfrac{di_4}{dt} + i_4 r_2 - u_C = -e \\ C \dfrac{du_C}{dt} = i_3 \end{cases} \qquad (5.1)$$

În rezultatul înlocuirii $i_2=i_1-I$; $i_4=i_1-i_3$ și transformărilor necesare se obțin trei ecuații față de derivatele $\dfrac{di_1}{dt}$, $\dfrac{di_3}{dt}$ și $\dfrac{du_C}{dt}$

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} = -i_1 r_1 - u_C + I r_1 \\ L_2 \dfrac{di_1}{dt} - L_2 \dfrac{di_3}{dt} = -i_1 r_2 + i_3 r_2 + u_C - e \\ C \dfrac{du_C}{dt} = i_3 \end{cases} \qquad (5.2)$$

Din sistemul (5.2), obținem:

$$\frac{di_1}{dt} \approx \frac{\Delta i_1}{\Delta} = \frac{-L_2 C (i_1 r_1 - u_C + r_1 I)}{-L_1 L_2 C} = \frac{-i_1 r_1 - u_C + r_1 I}{L_1}, \qquad (5.3)$$

unde

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} (i_1 r_1 - u_C + r_1 I) & 0 & 0 \\ (i_1 r_2 + i_3 r_2 + u_C - e) & -L_2 & 0 \\ i_3 & 0 & C \end{vmatrix} = -L_2 C (i_1 r_1 - u_C + r_1 I)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_2 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = -L_1 L_2 C .$$

$$\frac{di_3}{dt} \approx \frac{\Delta i_3}{\Delta} = \frac{i_1 r_2 - i_3 r_2 - u_C + e}{L_2} + \frac{-i_1 r_1 - u_C + r_1 I}{L_1}, \qquad (5.4)$$

$$\frac{du_C}{dt} \approx \frac{\Delta u_C}{\Delta} = \frac{i_3}{C}, \qquad (5.5)$$

unde

$$\Delta i_3 = \begin{vmatrix} L_1 & (i_1 r_1 - u_C + r_1 I) & 0 \\ L_2 & (i_1 r_2 + i_3 r_2 + u_C - e) & 0 \\ 0 & i_3 & C \end{vmatrix} = L_1 C (i_1 r_2 + i_3 r_2 + u_C - e) - L_2 C (i_1 r_1 - u_C + r_1 I)$$

$$\Delta u_C = \begin{vmatrix} L_1 & 0 & (i_1 r_1 - u_C + r_1 I) \\ L_2 & -L_2 & (i_1 r_2 + i_3 r_2 + u_C - e) \\ 0 & 0 & i_3 \end{vmatrix} = L_1 L_2 i_3$$

**Expresiile (5.3), (5.4), (5.5) pot fi scrise într-o formă generală**

$$\frac{di_1}{dt} = f_1(i_1, i_3, t);$$

$$\frac{di_2}{dt} = f_2(i_1, i_3, t); \qquad (5.6)$$

$$\frac{du_C}{dt} = f_3(i_3, t).$$

**La rezolvarea acestui sistem poate fi aplicată metoda Euler, conform cărei avem**

$$i_1^{(k+1)} = i_1^{(k)} + \left(-400 i_1^{(k)} - 10 u_1^{(k)} + 2000\right) h ; \qquad (5.7)$$

$$i_3^{(k+1)} = i_3^{(k)} + \left[850 i_1^{(k)} - 1250 i_3^{(k)} - 22{,}5 u_3^{(k)} + 1762{,}5 \sin(360 \cdot 50kh) + 90^\circ\right] h ; \qquad (5.8)$$

$$u_C^{(k+1)} = u_C^{(k)} + 10^4 i_1^{(k)} h . \qquad (5.9)$$

**unde** $k$=0÷500: $h$=$10^{-4}$ $s$

Calculele se efectuează prin aplicarea tehnicii de calcul cu luarea în considerație a valorilor inițiale $U_C(0)$; $i_1(0)$; $i_4(0)$.

**Concluzii privitoare la metodele de calcul a circuitelor în regim tranzitoriu.**

1. Analiza circuitelor electrice cu un număr de elemente reactive $n \leq 2$ în regim tranzitoriu poate fi efectuată prin aplicarea metodei clasice sau a metodei operaționale, dacă sursa de energie este de forma continuă sau sinusoidală.
2. În circuitele electrice cu surse în formă de impuls prezentat în forma analitică se aplică integrala Duhamel, Dacă impulsul este prezentat în formă de caracteristică de frecvență a amplitudinei și fazei (impedanței sau admitanței de la intrare în circuit) obținute pe cale experimentală atunci se aplică integrala Fourier (metodele de aproximație).
3. Metoda variabilelor de stare poate fi aplicată la analiza circuitelor în regim tranzitoriu cu un număr de elemente reactive ce depășește $n \geq 3$.

# CUADRIPOLI ŞI FILTRE ELECTRICE

# 6. CUADRIPOLI

## 6.1. Noţiuni generale şi clasificarea cuadripolilor

Generatoarele şi receptoarele de energie sunt legate, de obicei, printr-un circuit intermediar, care, în general, poate fi

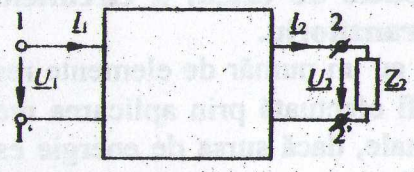



Fig. 6.1.

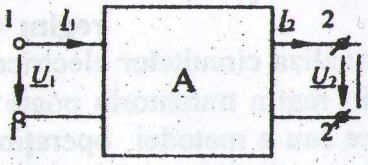



Fig. 6.2.

oricât de complex. Un astfel de circuit, având două borne de intrare şi două borne de ieşire, va fi numit cuadripol. Se deosebesc două tipuri de cuadripoli: pasivi şi activi.(fig.6.1,6.2).

Cuadripolul în interiorul căruia nu există surse de energie, se numeşte cuadripol pasiv. Exemple de cuadripoli pasivi: o linie de transport de energie, o linie de telecomunicaţie, un transformator, o punte etc.

Exemplu de cuadripol activ este amplificatorul care este totodată un cuadripol neliniar.

Cuadripolii pot fi , de asemenea , simetrici şi nesimetrici. Cuadripolul, la care nu importă ce borne se consideră de intrare şi ce borne se consideră de ieşire, este un cuadripol simetric.

Se vor folosi notaţiile:

$\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ - parametri de la intrare;

$\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$ - parametri de la ieşire.

Pentru un cuadripol pasiv se poate scrie următorul sistem de două relaţii liniare cunoscute sub denumirea de sistem de ecuaţii de tip A:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (6.1)$$

unde $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ - coeficienţi liniari, dependenţi de structura schemei, de parametrii elementelor pasive, de frecvenţă.

Aceşti coeficienţi pot fi determinaţi analitic sau experimental. Coeficienţii $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ sunt legaţi prin relaţia

$$\underline{A}\underline{D} - \underline{B}\underline{C} = 1. \qquad (6.2)$$

Dacă cuadripolul este simetric, atunci $A=D$.

## 6.2. Ecuaţiile cuadripolului pasiv

Se consideră cuadripolul pasiv din fig. 6.3a la care $\underline{E}_1=\underline{U}_1$; $\underline{U}_2=\underline{I}_2\underline{Z}_2$. Conform teoremei de compensaţie înlocuim $\underline{Z}_2$ prin $\underline{E}_2$ dirijată în direcţie opusă curentului $\underline{I}_2$ (fig. 6.3b).

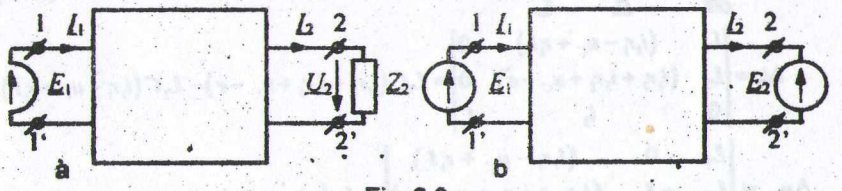



Fig. 6.3.

Aplicând metoda suprapunerii şi luând în considerare semnul plus sau minus în funcţie de direcţia de parcurgere a conturului şi direcţia f.e.m., curenţii $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ se consideră curenţi de contururi şi conform metodei de superpoziţie, se exprimă prin ecuaţiile de mai jos:

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_1\underline{Y}_{11} - \underline{E}_2\underline{Y}_{12}, \qquad (6.3)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{E}_1\underline{Y}_{12} - \underline{E}_2\underline{Y}_{22}. \qquad (6.4)$$

Din relaţia (6.4) se obţine

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2\frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (6.5)$$

Înlocuind expresia (6.5) în relaţia (6.4), se obţine

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_2\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (6.6)$$

Se notează $A=\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$; $B=\frac{1}{\underline{Y}_{12}}$; $C=\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}-\underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}$; $D=\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}$.

Înlocuind $\underline{E}_1=\underline{U}_1$; $\underline{E}_2=\underline{U}_2$, rezultă

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= A\underline{U}_2 + B\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= C\underline{U}_2 + D\underline{I}_2\end{aligned}\right\}.$$

Pentru verificarea ecuațiilor se scrie relația (6.2)

$$AD-BC=\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}^2}-\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}-\underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}^2}=1.$$

Schimbând locurile sursei $\underline{E}_1$ și sarcinii $\underline{Z}_2$ și înlocuind $\underline{Z}_2$ cu $\underline{E}_2$, se obține o relație ce leagă parametrii primari $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_1$ cu $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$.

Conform metodei suprapunerii efectuată pentru fig. 6.4, avem

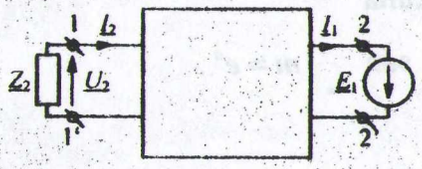


Fig. 6.4.

$$\underline{I}_2=-\underline{E}_2\underline{Y}_{11}+\underline{E}_1\underline{Y}_{12}, \qquad (6.7)$$

$$\underline{I}_1=-\underline{E}_2\underline{Y}_{12}+\underline{E}_1\underline{Y}_{22}. \qquad (6.8)$$

Din (6.7) rezultă

$$\underline{E}_1=\underline{E}_2\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}+\underline{I}_2\frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (6.9)$$

Introducând expresia (6.9) în relația (6.8), se obține

$$\underline{I}_1=\underline{E}_2\frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22}-\underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}+\underline{I}_2\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (6.10)$$

Înlocuind $\underline{E}_1$ prin $\underline{U}_1$ și $\underline{E}_2$ prin $\underline{U}_2$, rezultă

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= D\underline{U}_2 + B\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= C\underline{U}_2 + A\underline{I}_2\end{aligned}\right\}. \qquad (6.11)$$

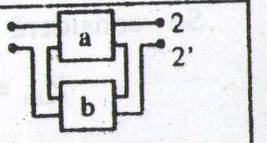
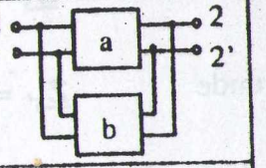
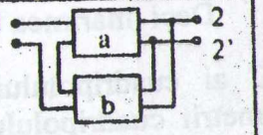
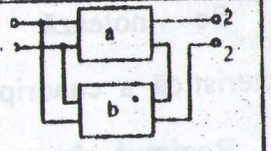
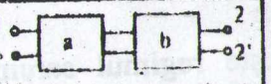
**Ecuațiile (6.1) descriu funcționarea cuadripolului la alimentarea pe partea bornelor 1-1', cu sarcina conectată la bornele 2-2'. Ecuațiile (6.11) descriu funcționarea cuadripolului la alimentarea pe partea bornelor 2-2', cu sarcina conectată la bornele 1-1'.**



## 6.3. Interconectarea cuadripolilor

Formele $\underline{Y}$ și $\underline{Z}$ de interconectare a cuadripolilor sunt aplicate în sinteza circuitelor electrice.

Tabelul 6.1

| Conectarea | Forma | Ecuațiile | Schema |
|---|---|---|---|
| în serie | Z | $\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$ |   |
| în paralel | Y | $\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}\right\}$ |   |
| în serie - paralel | H | $\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}\right\}$ |   |
| în paralel - serie | G | $\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$ |   |
| în cascadă | A | $\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$ |   |

## 6.4 Parametrii secundari ai cuadripolului pasiv ($Z_C$, $g$)

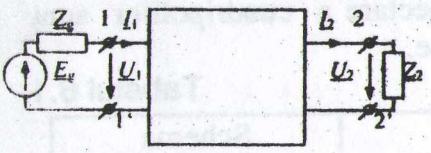


Fig. 6.5.

Deseori, între sursa de energie şi receptor se conectează un cuadripol simetric astfel încât impendanţa de la intrare să fie egală cu impendanţa de sarcină $Z_S$.

Se consideră schema din fig. 6.5 la care $\underline{Z}_{intr}=\underline{Z}_S$.:

$$\underline{Z}_{int}=\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}=\frac{D\underline{U}_2+B\underline{I}_2}{C\underline{U}_2+A\underline{I}_2}=\frac{A\underline{Z}_S+B}{C\underline{Z}_S+D},$$

sau

$$\underline{Z}_{S'}=\frac{A\underline{Z}_S+B}{C\underline{Z}_S+D}, \qquad (6.12)$$

de unde

$$\underline{Z}_{S'}=\sqrt{\frac{B}{C}}.$$

Deci mărimea $\underline{Z}_{int}=\underline{Z}_S=\sqrt{\frac{B}{C}}$ depinde de coeficienţii $B$ şi $C$ ai cuadripolului şi poate fi considerată ca unul dintre parametrii cuadripolului.

Se notează $\sqrt{\frac{B}{C}}$ prin $Z_C$ numită impendanţa caracteristică a cuadripolului pasiv.

Regimul în care $\underline{Z}_S=\sqrt{\frac{B}{C}}=Z_C$ când $Z_{int}=Z_C$ se numeşte regimul sarcinii adaptate (acordate), la care $\underline{U}''_1=\frac{\underline{E}}{2}$, $\underline{I}_1=\frac{\underline{E}}{2\underline{Z}_g}$.

Pentru caracterizarea cuadripolului se mai introduce un al doilea parametru ce caracterizează raportul mărimilor $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$ sau $\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$.

La regim adaptat

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1 e^{j\varphi_1}}{U_2 e^{j\varphi_2}} = M = m e^{jb}, \qquad (6.13)$$

unde

$$m = \frac{U_1}{U_2}, \qquad (6.14a)$$

$$b = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (6.14b)$$

Aplicând scara logaritmică, rezultă

$$a = \ln m = \ln \frac{U_1}{U_2}, \quad \text{sau} \quad m = e^a.$$

Deci

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} e^{jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^{(a+jb)}. \qquad (6.15)$$

Se notează $g = a + jb$ - constanta de transfer a cuadripolului

$a$ - coeficientul de atenuare;

$b$ - coeficientul de fază.

Constanta de transfer poate fi, de asemenea, exprimată în funcție de coeficienții cuadripolului:

$$g = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln \frac{C\underline{U}_2 + A\underline{I}_2}{\underline{I}_2} = \ln(C\underline{Z}_c + A) = \ln\left(C\sqrt{\frac{B}{C}} + A\right) = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right),$$

$$g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right), \qquad (6.16a)$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}} \qquad (6.16b)$$

**Exemplul 6.1.** Se consideră cuadripolul pasiv simetric din fig. 6.6 constituit din rezistenţe active. Se cere să se determine parametrii secundari $g$ şi $\underline{Z}_C$ ai cuadripolului dat.

**Rezolvare:**

În conformitate cu teoremele lui Kirchhoff, avem

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = 280\underline{I}_1 + 280\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \\ \underline{U}_1 = 280\underline{I}_1 + 510(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \end{cases} \tag{6.17}$$

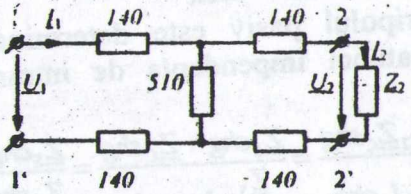



Fig. 6.6.

sau

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = 1{,}55U_2 + 714I_2 \\ I_1 = 1{,}97 \cdot 10^{-3}U_2 + 1{,}55I_2 \end{cases}, \tag{6.18}$$

$$\underline{U}_1 = A\underline{U}_2 + B\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = C\underline{U}_2 + D\underline{I}_2$$

Din compararea ecuaţiilor obţinute cu ecuaţiile de bază ale cuadripolului, (6.1) se pot scrie relaţiile

$$A = D = 1{,}55;\ B = 714\Omega;\ C = 1{,}97 \cdot 10^{-3} s$$

Verificare: $AD - BC = 1.$

Deci $\underline{Z}_C = \sqrt{\dfrac{B}{C}} = 600\Omega;\ g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) = 1;$

$$e^g = e^a \cdot e^{jb};\ b{=}0;\ a{=}1.$$

## 6.5 Ecuaţiile cuadripolului pasiv cu funcţii hiperbolice

Conform relaţiilor (6.16), (6.15)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{B}{C}};\ g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) \text{ sau } e^g = A + \sqrt{BC},\ e^{-g} = A - \sqrt{BC}.$$

Se exprimă coeficienţii $A$, $B$, $C$, $D$ prin parametrii secundari $Z_C$, $g$.

$$A=\frac{\left(A+\sqrt{BC}\right)+\left(A-\sqrt{BC}\right)}{2}=\frac{e^{g}+e^{-g}}{2}=chg$$

$$\sqrt{BC}=\frac{\left(A+\sqrt{BC}\right)-\left(A-\sqrt{BC}\right)}{2}=\frac{e^{g}-e^{-g}}{2}=shg$$

$$B=Z_C\sqrt{BC}=\sqrt{\frac{B}{C}}\sqrt{BC}=Z_C shg$$

$$C=\frac{\sqrt{BC}}{Z_C}=\frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{\frac{B}{C}}}=\frac{shg}{Z_C}$$

Deci, avem $A=D=chg$; $B=Z_C shg$; $C=\frac{shg}{Z_C}$.

$$\begin{cases}\underline{U}_1=\underline{U}_2 chg+\underline{I}_2\underline{Z}_C shg\\ \underline{I}_1=\dfrac{U_2}{Z_C}shg+\underline{I}_2 chg\end{cases}$$

Aceste ecuaţii sunt numite ecuaţii cu funcţii hiperbolice.

$$\begin{cases}\underline{U}_1=\underline{U}_2 chg+\underline{I}_2\underline{Z}_C shg\\ \underline{I}_1=\dfrac{U_2}{Z_C}shg+\underline{I}_2 chg\end{cases} \qquad (6.19)$$

## 6.6. Impedanţa de intrare a cuadripolului

La conectarea receptorului la bornele sursei de energie, regimul sursei este determinat de impendanţa sarcinii. Dacă sursa de energie şi receptorul sunt conectaţi prin intermediul unui cuadripol, atunci $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$ depind de impendanţa de intrare a cuadripolului. Impendanţa de intrare, la rândul său, depinde de structura schemei, de parametrii elementelor ce alcătuiesc

cuadripolul, adică de coeficienţii cuadripolului şi impendanţa sarcinii.

Se exprimă impendanţa de la intrare la bornele 1-1' prin intermediul coeficienţilor $A$, $B$, $C$, $D$ şi impendanţa $\underline{Z}_S$

Din ecuaţiile de bază a cuadripolului

$$\underline{Z}_{1int} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{A\underline{U}_2 + B\underline{I}_2}{C\underline{U}_2 + D\underline{I}_2} = \frac{A\underline{Z}_S + B}{C\underline{Z}_S + D}, \qquad (6.20)$$

unde $\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_S$.

La alimentarea de la bornele 2-2'

$$\underline{Z}_{2int} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{D\underline{U}'_1 + B\underline{I}'_1}{C\underline{U}'_1 + A\underline{I}'_1} = \frac{D\underline{Z}_g + B}{C\underline{Z}_g + A}. \qquad (6.21)$$

Determinăm raporturile dintre impendanţele de la intrare a cuadripolului la regimurile de funcţionare în gol şi scurtcircuit, în cazul alimentarii pe la bornele 1-1', apoi pe la bornele 2-2'.

Alimentarea cuadripolului la bornele 1-1'

a) regim de funcţionare în gol

$$Z_S = \infty \quad \underline{Z}_{10} = Z_{10}e^{j\varphi_{10}} = \frac{A}{C}$$

b) regim de scurtcircuit

$$Z_S = \infty \quad \underline{Z}_{1SC} = Z_{1SC}e^{j\varphi_{1SC}} = \frac{B}{D}.$$

Alimentarea cuadripolului la bornele 2-2'

a) regim de funcţionare în gol

$$Z_g = \infty \quad \underline{Z}_{20} = Z_{20}e^{j\varphi_{20}} = \frac{D}{C}$$

b) regim de scurtcircuit

$$Z_g = 0 \quad \underline{Z}_{2SC} = Z_{2SC}e^{j\varphi_{2SC}} = \frac{B}{A}.$$

Impendanţele de intrare la regim de funcţionare în gol şi regim de scurtcircuit depind de parametrii cuadripolului, adică de coeficienţii $A, B, C, D$.

Dacă coeficienţii sunt legaţi între ei prin relaţia $AD - BC = 1$, atunci se poate determina relaţia dintre impedanţele $\underline{Z}_{10}$, $\underline{Z}_{1SC}$, $\underline{Z}_{20}$, $\underline{Z}_{2SC}$ şi anume

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{1SC}} = \frac{A}{C}\cdot\frac{D}{B};\quad \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{2SC}} = \frac{D}{C}\cdot\frac{A}{B},$$

de unde se obţine

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{1SC}} = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{2SC}}. \tag{6.22}$$

Dacă cuadripolul pasiv este determinat prin parametrii secundari $g$, $\underline{Z}_C$, atunci impendanţa de intrare se va exprima prin relaţia;

$$\underline{Z}_{int} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 chg + \underline{I}_2 \underline{Z}_C shg}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} shg + \underline{I}_2 chg} = \frac{\underline{Z}_S chg + \underline{Z}_C shg}{\frac{\underline{Z}_S}{\underline{Z}_C} shg + chg} = \frac{\underline{Z}_S chg + \underline{Z}_C shg}{\underline{Z}_S shg + \underline{Z}_C chg}. \tag{6.23}$$

Împărţind componentele numărătorului şi numitorului cu "$chg$", rezultă

$$\underline{Z}_{int} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_S + \underline{Z}_C thg}{\underline{Z}_S thg + \underline{Z}_C}. \tag{6.24}$$

### 6.7 Determinarea parametrilor $g$, $Z_C$ pe cale experimentală

Se consideră două regimuri şi anume regimul de funcţionare în gol şi regimul de scurtcircuit:

a) regim de funcţionare în gol

$$Z_S = \infty \quad \underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_C}{thg} \tag{6.25}$$

b) regim de scurtcircuit

$$Z_S = 0 \quad \underline{Z}_{1SC} = \underline{Z}_C thg. \tag{6.26}$$

Înmulţind expresiile (6.25) şi (6.26) între ele, se obţine

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1SC}} = Z_C e^{j\varphi_C} \tag{6.27}$$

Împărţind (5.26) la (5.25), se obţine:

$$thg = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1SC}}{\underline{Z}_{10}}} = th(a + jb) = Te^{j\tau} \qquad (6.28)$$

Pentru determinarea constantei de transfer $g=a+jb$ se aplică o relaţie din matematică

$$g = a + jb = \frac{1}{2} \ln \frac{1+Te^{j\tau}}{1-Te^{j\tau}} = \frac{1}{2} \ln We^{j\xi},$$

unde "$W$" este modulul numărului complex $\frac{1+Te^{j\tau}}{1-Te^{j\tau}}$,

$\xi$ - argumentul numărului complex.

Deci

$$e^{2g} = e^{2a} \cdot e^{j2b} = We^{j\xi}$$

de unde

$$e^{2a} = W; \quad a = \frac{1}{2} \ln W = \ln \sqrt{W}$$

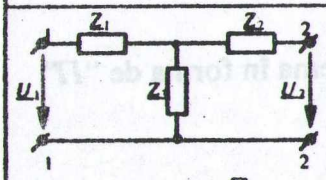
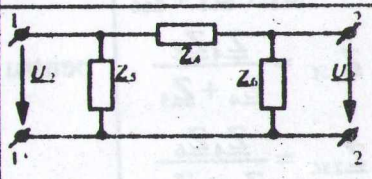
$$e^{j2b} = e^{j\xi}; \quad b = \frac{1}{2}\xi + \pi.$$

Din rezultatele măsurărilor impedanţelor în regim de funcţionare în gol şi de scurtcircuit, coeficientul de fază "$b$" poate avea mai multe valori deoarece relaţiile aplicate pot da două valori pentru $\varphi_C$. Mărimea $\tau$ reiese din condiţia $a \geq 0$.

## 6.8. Schemele echivalente ale cuadripolului pasiv

În practică se întâlnesc cuadripoli cu diferite scheme de legătură ale elementelor constitutive. Prezintă interes deosebit schemele în formă de "*T*" şi în formă de "*IT*".

Tabelul 6.2

| Schema în formă de "*T*" | Schema în formă de "*Π*" |
|---|---|
|  |  |
| $A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$ | $A = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_6}$ |
| $B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ | $B = \underline{Z}_4$ |
| $C = \frac{1}{\underline{Z}_3}$ | $C = \frac{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 \underline{Z}_6}$ |
| $D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ | $D = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5}$ |
| Dacă $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$, atunci $A=D$ | Dacă $\underline{Z}_5 = \underline{Z}_6$, atunci $A=D$ |

Aceste expresii sunt obţinute din ecuaţiile de bază pentru regimurile de funcţionare în gol şi de scurtcircuit, de unde reiese, că:

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1SC}}{\underline{Z}_{2SC}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1SC})}}\,; \quad B = \underline{Z}_{2SC} A\,; \quad C = \frac{A}{\underline{Z}_{10}}\,; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1SC}}\,,$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{10} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_{1SC} &= \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \underline{Z}_{2SC} &= \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \end{aligned}\right\}$$ pentru schema în formă de "*T*" şi

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{10} &= \frac{\underline{Z}\cdot(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}{\underline{Z}_5 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6} \\ \underline{Z}_{1SC} &= \frac{\underline{Z}_4\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} \\ \underline{Z}_{2SC} &= \frac{\underline{Z}_4\underline{Z}_6}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6} \end{aligned}\right\}$$ pentru schema în forma de "*Π*"

## 6.9. Diagrama cercului pentru un cuadripol pasiv

Se consideră un cuadripol pasiv (fig. 6.7) la care tensiunea aplicată este constantă ca valoare, fază şi frecvenţă.

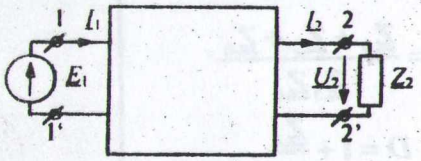


Fig. 6.7.

Impendanţa sarcinii de la ieşirea cuadripolului variază ca modul astfel , încât semnul unghiului de defazaj $\varphi_2$ rămîne constant.

În acest caz curenţii $\underline{I}_2$, $\underline{I}_1$ şi tensiunea $\underline{U}_2$ satisfac diagrama cercului.

a) Se va construi diagrama circulară pentru curentul $\underline{I}_2$. În acest scop schema cuadripolului, cu excepţia impedanţei $\underline{Z}_2$, se înlocuieşte printr-un dipol activ. Reieşind din relaţiile scrise pentru regimurile de funcţionare în gol şi de scurtcircuit, avem

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (6.29)$$

unde $\underline{U}_{22'0}$ - tensiunea la bornele 2-2' în regim de funcţionare în gol; $\underline{Z}_{int\,22\odot} = \underline{Z}_{2SC} = \underline{Z}_{2SC}e^{j\varphi_{2SC}}$ - impedanţa de intrare faţă de bornele 1-1' la scurtcircuitarea bornelor 2-2'.

Împărţind numărătorul şi numitorul părţii din dreapta a relaţiei (6.29) şi luând în considerare faptul că $\frac{\underline{U}_{22'0}}{\underline{Z}_{2SC}} = \underline{I}_{2SC}$, se obţine ecuaţia arcului de cerc pentru $I_2$:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_{2SC}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2SC}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2SC})}}; \qquad (6.30)$$

Din relaţia (6.30) reiese că vectorul curentului $I_2$ alunecă pe arcul de cerc la care $I_{2SC}$ este coardă.

b) Diagrama cercului pentru $I_1$.

Curentul $I_1$ poate fi legat liniar cu $I_2$ printr-o ecuaţie de forma:

$$\underline{I}_1 = a + b\underline{I}_2, \qquad (6.31)$$

unde $a$, $b$ - sunt coeficienţi constanţi determinaţi din regimurile de funcţionare în gol şi de scurtcircuit.

1) regim de funcţionare în gol, $I_2$=0

$$\underline{I}_{10} = a$$

2) regim de scurtcircuit, $U_2$=0, $\underline{I}_2$=$\underline{I}_{2SC}$

$$\underline{I}_{1SC} = \underline{I}_{10} + b\underline{I}_{2SC}$$

de unde $$b = \frac{\underline{I}_{1SC} - \underline{I}_{10}}{\underline{I}_{2SC}}$$

Deci

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{I}_{1SC} - \underline{I}_{10}}{\underline{I}_{2SC}} \underline{I}_2. \qquad (6.32)$$

Introducând în ecuaţia (6.32) relaţia (6.30), se obţine:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{I}_{1SC} - \underline{I}_{10}}{\underline{I}_{2SC}} \cdot \frac{\underline{I}_{2SC}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2SC}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2SC})}};$$

sau $$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{I}_{1SC} - \underline{I}_{10}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2SC}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2SC})}}. \quad (6.33)$$

Ecuaţia (4.33) reprezintă ecuaţia arcului de cerc pentru curentul $\underline{I}_1$.

c) Ecuaţia arcului de cerc pentru tensiunea $\underline{U}_{ab}$.

La variaţia modulului impedanţei $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ în ramura dată, tensiunea $\underline{U}_{ab}$ poate fi , de asemenea , exprimată prin ecuaţia unui arc de cerc:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ab0} + \frac{\underline{U}_{abSC} - \underline{U}_{ab0}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2SC}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2SC})}}. \quad (6.34)$$

## 6.10. Construcţia diagramei cercului pentru un cuadripol pasiv

Ordinea construcţiei diagramei cercului.

1. Se efectuează schemele de montaj pentru studierea regimurilor de funcţionare în gol şi de scurtcircuit pentru, determinarea mărimilor

$$\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}; \quad \underline{Z}_{10} = Z_{10} e^{j\varphi_{10}}; \quad \underline{Z}_{1SC} = Z_{1SC} e^{j\varphi_{1SC}}; \quad \underline{Z}_{2SC} = Z_{2SC} e^{j\varphi_{2SC}}.$$

2. Se calculează mărimile

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{10}} = I_{10} e^{j\varphi_{10}}; \quad \underline{I}_{1SC} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1SC}} = I_{1SC} e^{j\varphi_{1SC}}$$

ce se introduc în ecuaţia arcului de cerc

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \frac{\underline{I}_{1SC} - \underline{I}_{10}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2SC}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{2SC})}}.$$

3. Se alege scara pentru tensiune, curent: $\mu_U = \left[\frac{V}{cm}\right]$;

$\mu_I = \left[\frac{A}{cm}\right]$.

4. Se dispune vectorul tensiunii $U_1$ de-a lungul axei verticale la scara aleasă, apoi se dispun vectorii $I_{1SC}$ şi $I_{10}$ sub unghiurile $\varphi_{1SC}$ şi respectiv $\varphi_{10}$. Unind extremităţile vectorilor $I_{1SC}$ şi $I_{10}$ se obţine coarda *mn*.

5. Se determină centrul cercului, prin construirea coardei *mn* şi unghiului $g = a + jb = \frac{1}{2}\ln\frac{1+Te^{j\tau}}{1-Te^{j\tau}} = \frac{1}{2}\ln We^{j\xi}$. La determinarea centrului cercului, din punctul "*n*" sub unghiul $\varphi = 60°$, se duce tangenta la cerc şi perpendiculara la această tangentă. Se împarte segmentul *mn* în două părţi egale şi prin centrul se duce a doua perpendiculară la acest segment. Punctul de intersecţie a perpendicularelor determină centrul cercului. Se trasează arcul de cerc *mpn* din punctul "$O_1$".

6. Se alege scara pentru impedanţe $\mu_Z = \left[\frac{\Omega}{cm}\right]$ şi la scara aleasă se dispune $Z_{2SC}$ de-a lungul coardei din punctul "*m*" spre punctul "*n*" $Z_{2SC} \rightarrow \overline{mq}$. Sub unghiul (-ψ), adică 60°, din punctul "*q*" se duce linia modulului impendanţei variabile $Z_2 \rightarrow \overline{qr}$ şi la scara aleasă $\mu_Z = \left[\frac{\Omega}{cm}\right]$ pe aceasta linie se dispun valorile pentru $Z_2$ de la "0" până la "∞". Arcul *mpn* reprezintă totalitatea punctelor extremităţii vectorului curentului $I_2$ la variaţia $Z_2$ =0÷∞. Dacă este cunoscută valoarea $Z_2$ la care se determină valoarea curentului, atunci se dispune impedanţa $Z_2$ la scara aleasă dealungul liniei *qr*. Se trasează linia *ms*. La intersecţia acestei linii cu arcul de cerc se obţine punctul "*p*" care reprezintă extremitatea vectorului curentului $I_1$ dus din punctul "0" până în punctul "*p*", adică $\overline{op} \rightarrow \underline{I}_1 = I_1 e^{j\varphi}$.

În continuare se prezintă modul de aplicare a diagramei cercului la determinarea mărimilor $\underline{I}_2$, $\underline{U}_2$, $P_1$ şi $Q_1$.

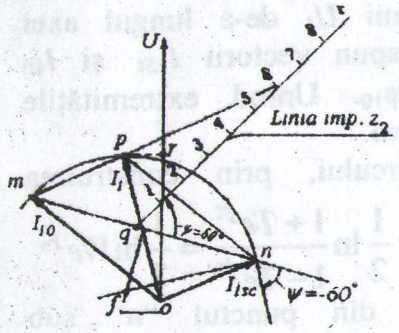



Fig. 6.8

Diagrama cercului (fig. 6.8) serveşte nu numai pentru determinarea curentului $\underline{I}_1$ la variaţia $Z_2 = 0 + \infty$ dar şi pentru determinarea modulurilor fazorilor $\underline{I}_2$, $\underline{U}_2$, $P_1$ şi $Q_1$. Mărimile indicate sunt determinate de segmentele respective la scara dată.

$I_2 \to \overline{mp}$; $U_2 \to \overline{pn}$; $P_1 \to OT$; $Q_1 \to Of$.

Segmentul $OT$ reprezintă proiecţia fazorului curentului $I_1$ pe fazorul $U_1$ la scara $m_{p_1} = U_1 m_{I_1}$ sau

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Proiecţia vectorului $I_1$ pe direcţia perpendiculară fazorului $U_1$ determină segmentul $of$, iar la scara dată determină puterea reactivă $Q_1 = U_1 I_1 \sin\varphi$.

Astfel, pentru orice valoare a impedanţei $Z_2$ pe diagrama cercului se pot determina mărimile $I_1$, $I_2$, $P_1$ şi $Q_1$ şi deci se pot construi graficele funcţiilor $I_1 = f(Z_2)$; $I_2 = f(Z_2)$; $P_1 = f(Z_2)$; $Q_1 = f(Z_2)$ ceea ce permite să se efectueze o analiză deplină a regimurilor de funcţionare a cuadripolului pasiv.

**Aplicaţia 6.1.**

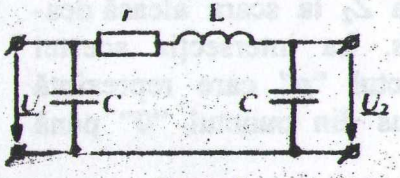



Fig. 6.9.

Se consideră cuadripolul din fig. 6.9. Se cere să se determine coeficienţii $A$, $B$, $C$, $D$, folosind:

1) ecuațiile de bază ale cuadripolului în regimurile de funcționare în gol" și de scurtcircuit;

2) impendanțele cuadripolului în regimurile de funcționare în gol și de scurtcircuit, prealabil calculate.

Date numerice: $r$=20 Ω; $X_L$=20 Ω; $X_C$= - 40Ω.

Rezolvare.

1) Se determină coeficienții $A$, $B$, $C$, $D$ din ecuațiile de bază ale cuadripolului

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= D\underline{U}_2 + B\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= C\underline{U}_2 + A\underline{I}_2\end{aligned}\right\}$$

și se consideră regimurile:

a) de funcționare în gol ($Z_2$=∞; $I_2$=0)

$\underline{U}_{10} = A\underline{U}_{20}$; $\underline{I}_{10} = C\underline{U}_{20}$ de unde $A = \dfrac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}}$; $C = \dfrac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}}$.

Se exprimă mărimile $\underline{U}_{20}$, $\underline{I}_{10}$, prin mărimea $\underline{U}_{10}$ aplicând schema din fig. 6.8 la regim mers în gol

$$\underline{U}_{20} = \underline{I}_{10}(-jX_C) = \frac{\underline{U}_{10}}{r + j(X_L - X_C)} j(-X_C) = (1-j)\underline{U}_{10},$$

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\dfrac{-jX_C\left[r + j(X_L - X_C)\right]}{-jX_C + r + j(X_L - X_C)}} = (0{,}025 + j0{,}05)\underline{U}_{10}.$$

Deci

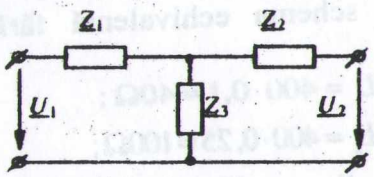
$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}} = \frac{\underline{U}_{10}}{(1-j)\underline{U}_{10}} = 0{,}5 + j0{,}5;\quad \underline{A} = 0{,}5 + j0{,}5;$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}} = \frac{\underline{U}_{10}(0{,}025 + j0{,}05)}{(1-j)\underline{U}_{10}} = -0{,}0125 + j0{,}0375, s;$$

$$\underline{C} = -0{,}0125 + j0{,}0375, s$$

b) de scurtcircuit: ($Z_2$=0; $U_2$=0)

$\underline{U}_{1SC} = B\underline{I}_{2SC}$; de unde $B = \dfrac{\underline{U}_{1SC}}{\underline{I}_{2SC}}$;



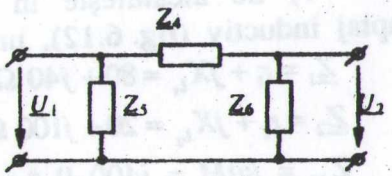




Fig. 6.10.

$$\underline{I}_{1SC} = D\underline{I}_{2SC}; \text{ de unde } D = \frac{\underline{I}_{1SC}}{\underline{I}_{2SC}}.$$

Se exprimă mărimile $\underline{I}_{1SC}$ şi $\underline{I}_{2SC}$ prin mărimea $\underline{U}_{1SC}$ aplicând schema din fig. 6.8 în regim de scurtcircuit:

$$\underline{I}_{1SC} = \frac{\underline{U}_{1SC}}{\dfrac{-jX_C(r+jX_L)}{-jX_C + r + jX_L}} = 0,025\underline{U}_{1SC};$$

$$\underline{I}_{2SC} = \frac{\underline{U}_{1SC}}{r + jX_L} = (0,25 - j0,25)\cdot 10^{-2}\underline{U}_{1SC}.$$

Deci

$$\underline{B} = \frac{\underline{U}_{1SC}}{\underline{I}_{2SC}} = 20 + j20\ \Omega; \qquad \underline{D} = \frac{\underline{I}_{1SC}}{\underline{I}_{2SC}} = 0,5 + j0,5.$$

S-au obţinut valorile $\underline{A} = \underline{D} = 0,5 + j0,5$ - de unde rezultă că cuadripolul este simetric. Verificarea calculelor se efectuează prin aplicarea relaţiei $AD - BC = 1$

$$(0,5 + j0,5)(0,5 + j0,5) - (20 + j20)(-0,0125 + j0,0375) = 1.$$

Se determină coeficienţii $A$, $B$, $C$, $D$, folosind impedanţele cuadripolului în regimurile de funcţionare în gol şi de scurtcircuit.

Conform relaţiilor ce există între coeficienţii cuadripolului şi impedanţele lui rezultă:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1SC}}{\underline{Z}_{2SC}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1SC})}}; \quad B = A\underline{Z}_{2SC}; \quad C = \frac{A}{\underline{Z}_{10}}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1SC}}.$$

unde

$$\underline{Z}_{10} = \frac{-jX_C\left[r + j(X_L - X_C)\right]}{-jX_C + r + j(X_L - X_C)} = \frac{-j40\left[20 + j(20 - 40)\right]}{-j40 + 20 + j(20 - 40)} = 6 - j16\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_{1SC} = \frac{(r + jX_L)(-jX_C)}{r + jX_L - jX_C} = \frac{(20 + j20)(-j40)}{20 + j20 - j40} = 40\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_{2SC} = \underline{Z}_{1SC} = 40\ \Omega.$$

Introducând impedanţele $\underline{Z}_{10}$, $\underline{Z}_{1SC}$, $\underline{Z}_{2SC}$ în expresiile de mai sus, rezultă $\underline{A} = 0,5 + j0,5$; $\underline{B} = 20 + j20\ \Omega$; $\underline{C} = -0,0125 + j0,0375\ s$; $\underline{D} = 0,5 + j0,5$.

**Aplicaţia 6.2.**

Să se determine coeficienţii $A$, $B$, $C$, $D$ ai cuadripolului pasiv, impedanţa caracteristică $\underline{Z}_C$ şi coeficientul de transfer "$g$" pentru schemele echivalente în formă de "$T$" şi în formă de "$\Pi$" (fig. 6.10), dacă: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 2,5\Omega$; $\underline{Z}_3 = 5\Omega$. De asemenea, să se determine tensiunea $\underline{U}_2$ la sarcină acordată pentru $\underline{U}_1 = 10V$.

Rezolvare.

1) Se consideră schema în formă de "$T$" (fig. 6.10a). În acest caz coeficienţii cuadripolului au valorile

$$A = D = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = 1 + \frac{2,5}{5} = 1,5;\quad B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = 6,25\ \Omega;$$

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{5} = 0,25\ S.$$

Impedanţa caracteristică

$$\underline{Z}_{CT} = \sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}\right)} = \sqrt{\frac{B}{C}} = 5,68\ \Omega$$

Constanta de transfer

$$g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) = \ln\left(1,5 + \sqrt{6,25 \cdot 0,2}\right) = 0,961.$$

Tensiunea la sarcina cu $Z_{CT} = 5,68\Omega$.

$g = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$, de unde $\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-g} = \frac{\underline{U}_1}{e^g} = 3,83\ V$.

2) Se consideră schema în formă de "*IT*" (fig. 6.10b) $\underline{Z}_4=5\Omega$; $\underline{Z}_5=\underline{Z}_6=10\Omega$.

$$A = D = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_6} = 1 + \frac{5}{10} = 1,5;\quad B = \underline{Z}_4 = 5\ \Omega;$$

$$C = \frac{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 \underline{Z}_6} = 0,25\ S.$$

Impedanța caracteristică

$$\underline{Z}_{CП} = \sqrt{\frac{B}{C}} = 4,46\ \Omega.$$

Constanta de transfer

$$g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) = 0,961.$$

Se determină tensiunea $\underline{U}_2$ de la sarcina acordată pentru $\underline{U}_1=10V$.

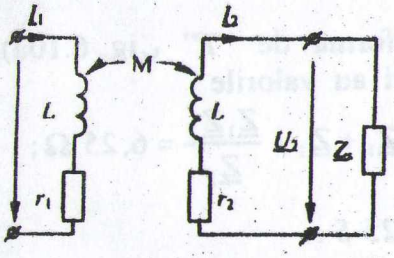



Fig. 6.11.

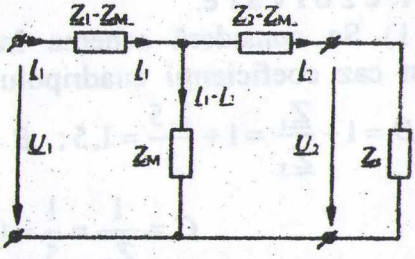



Fig. 6.12.

$\underline{Z}_S=\underline{Z}_C=4,46,\Omega$. $e^g = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}$, de unde $\underline{U}_2 = \underline{U}_1 e^{-g} = 3,8,V$.

**Aplicația 6.3.**

Să se determine coeficienții *A*, *B*, *C*, *D* ai transformatorului liniar din fig. 6.11, dacă $L_1=0,1H$; $M=0,4H$; $r_1=80\Omega$; $r_2=20\Omega$; $\omega=400s^{-1}$; $L_2=0,25H$.

Rezolvare.

1) Se alcătuieşte în prealabil schema echivalentă fără cuplaj inductiv (fig. 6.12), unde

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jX_{L_1} = 80 + j40\ \Omega;\ X_{L_1} = \omega L_1 = 400 \cdot 0,1 = 40\Omega;$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jX_{L_2} = 20 + j100\ \Omega;\ X_{L_2} = \omega L_2 = 400 \cdot 0,25 = 100\Omega;$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M = j400 \cdot 0,4 = j160\ \Omega;\quad X_M = \omega M .$$

Determinăm eficienţii $A$, $B$, $C$, $D$, folosind expresiile acestor coeficienţi prin impedanţele cuadripolului în regimurile de funcţionare în gol şi de scurtcircuit.

Deci

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2SC}}};\ \underline{B} = A\underline{Z}_{2SC};\ \underline{C} = \frac{A}{\underline{Z}_{10}};\ \underline{D} = C\underline{Z}_{20},$$

unde

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_M + \underline{Z}_M = \underline{Z}_1 = 20 + j40\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{20} = \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M + \underline{Z}_M = \underline{Z}_2 = 20 + j100\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_{2SC} = \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M + \frac{\underline{Z}_M(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_M + \underline{Z}_1 - \underline{Z}_M} =$$

$$= \underline{Z}_2 - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1} = 42,07 - j44,83\ \Omega$$

Introducând valorile $\underline{Z}_{10}$, $\underline{Z}_{20}$, $\underline{Z}_{2SC}$ în relaţiile corespunzătoare pentru $A$, $B$, $C$, $D$ se obţine

$$\underline{A} = 2,5 - j2,5 = 2,55e^{-j11^{\circ}20'};$$

$$\underline{B} = A\underline{Z}_{2SC} = 128e^{j38^{\circ}20'}\ \Omega;$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}} = 6,25 \cdot 10^{-3} e^{-j90^{\circ}}\ S;$$

$$\underline{D} = \underline{C}\underline{Z}_{20} = 0,637e^{-j11^{\circ}20'}.$$

Pentru verificarea calculelor se aplică relaţia

$$AD - BC = 1.$$

## 7. Filtrele electrice

### 7.1. Consideraţii generale

În tehnica telecomunicaţiilor este adesea necesar să se permită trecerea spre receptor numai a curenţilor ale căror valori ale frecvenţei sunt cuprinse într-un anumit interval. În acest scop, între receptor şi dispozitivul de alimentare se conectează un filtru electric. Filtrul electric este , de obicei , un cuadripol sau un lanţ de cuadripoli ai cărui constantă de atenuare este mică (sau nulă, dacă filtrul se consideră fără pierderi) în anumite intervale de frecvenţă, numite intervale de trecere sau benzi de trecere; în celelalte intervale de frecvenţă, numite intervale de eliminare sau benzi de oprire, constanta de atenuare fiind foarte mare.

Frecvenţele care se transmit prin filtrare fără atenuare formează benzile de trecere, iar frecvenţele care se atenuează formează benzile de oprire.

Frecvenţele limită ale benzilor de oprire se numesc frecvenţe de tăiere sau frecvenţe limită.

După poziţia ocupată de benzile de trecere sau de oprire în spectrul de frecvenţe se deosebesc:

- filtre trece - jos, care au banda de trecere $(0, f_1)$ şi banda de oprire $(f_1, \infty)$;
- filtre trece - sus, care au bandă de oprire $(0, f_1)$ şi bandă de trecere $(f_1, \infty)$;
- filtre trece - bandă, care au banda de trecere $(f_1, f_2)$ şi benzile de oprire $(0, f_1)$ şi $(f_2, \infty)$ cu $f_1 < f_2$;
- filtre opreşte bandă, care au banda de oprire $(f_1, f_2)$ şi benzile de trecere $(0, f_1)$ şi $(f_2, \infty)$ cu $f_1 < f_2$;
- filtre în pieptene, care au mai multe benzi de oprire şi trecere alternante.

Din punct de vedere al elementelor componente, există: filtre cu elemente reactive ($LC$); filtre $RC$; filtre cu rezonatoare piezoelectrice. Principalele filtre cu elemente reactive folosite în sistemele de telecomunicaţii sunt aşa –

zisele filtre tip "*k*", filtre tip "*m*", filtre în punte, filtre diferenţiale etc.

Filtrul de tip "*k*" este filtrul la care produsul dintre impedanţa longitudinală şi impedanţa transversală este un număr constant "*k*", ce nu depinde de frecvenţă. Filtrul de tip "*m*" este filtrul la care produsul acestor impedanţe depinde de frecvenţă.

Calitatea filtrului este cu atât mai înaltă, cu cât proprietăţile de filtrare sunt mai evidente. Proprietăţile de filtrare sunt bazate, din punct de vedere fizic, pe fenomenul de rezonanţă - rezonanţă de tensiuni sau rezonanţă de curenţi.

Felul cum se transmit semnalele (curenţii şi tensiunile) printr-un cuadripol, şi deci atenuarea acestora la un filtru, depinde de impedanţa elementului conectat la ieşirea filtrului.

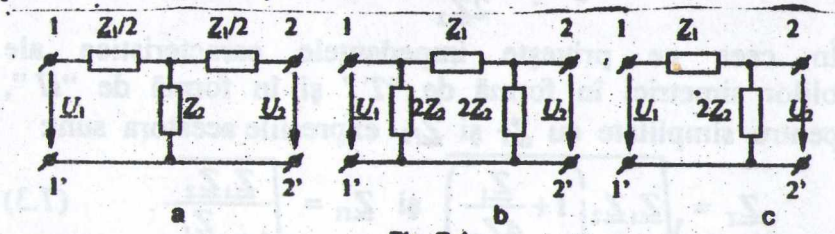



Fig. 7.1.

În teoria filtrelor electrice, se consideră de obicei filtre simetrice(cu parametrii $A=D$) şi se admite, pentru simplificare, că la ieşirea fiecărui filtru este conectată impedanţa sa imagine ($\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$). Filtrele electrice se caracterizează prin curbele corespunzătoare de variaţie a atenuării "*a*" şi defazajului "*b*" cu frecvenţă, care se numesc caracteristici de frecvenţă ale filtrului.

În dependenţă de structura filtrului, se deosebesc filtrele electrice în formă de "*T*", în formă de "*П*", în formă de "Г" (fig. 7.1 a, b, c).

## 7.2. Determinarea benzilor de trecere şi de oprire

Constanta de transfer a filtrului în formă de "$\Gamma$", notată cu $g/2$, se determină din expresia

$$sh\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \qquad (7.1)$$

Cuadripolii simetrici în formă de "$T$" şi în formă de "$\Gamma$" pot fi consideraţi formaţi prin conectarea corespunzătoare în lanţ a doi cuadripoli în formă de "$\Gamma$". Constanta de transfer a acestor cuadripoli simetrici este de două ori mai mare decât a structurii componente "$\Gamma$", deci este "$g$". Se poate scrie

$$chg=1+\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}. \qquad (7.2)$$

În ceea ce priveşte impedanţele caracteristice ale cuadripolilor simetrici în formă de "$T$" şi în formă de "$\Pi$", notate pentru simplitate cu $\underline{Z}_T$ şi $\underline{Z}_\Pi$, expresiile acestora sunt:

$$\underline{Z}_T=\sqrt{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)} \text{ şi } \underline{Z}_\Pi=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{1+\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}. \qquad (7.3)$$

Dacă impedanţele $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ care intervin în structurile din Fig. 7.1 sunt mărimi inverse, iar puterea de inversiune este o constantă reală, independentă de frecvenţă, adică

$$\underline{Z}_1\underline{Z}_2=K^2. \qquad (7.4)$$

Filtrele respective se numesc filtre de tip "$K$".

Pentru ca o structură cuadripolară cu elemente reactive să se comporte ca un filtru este necesar ca impedanţele $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ să aibă reactanţe de semne opuse, adică: $\underline{Z}_1=\pm jX_1$, iar $\underline{Z}_2=+jX_2$.

a) Intervalul de trecere. Coeficientul de fază.

Din teoria cuadripolilor este cunoscut că coeficientul de transfer are expresia:

$$chg = ch(a + jb) = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}.$$

Dacă $a = 0$, atunci:

$$chg = ch(a + jb) = chjb = \cos b = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2};$$

de unde

$$-1 \le 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \le 1;$$

sau

$$-1 \le \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \le 0; \qquad (7.5)$$

Dacă $\underline{Z}_1 = jX_1$, iar $\underline{Z}_2 = -jX_2$, atunci $-1 \le -\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \le 0$.

Deci $\underline{Z}_1 \le \underline{Z}_2$, ceea ce ne permite să determinăm mărimile impedanţelor.

Intervalul frecvenţelor de trecere se determină din relaţiile $-\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = 0$, adică $\underline{Z}_1 = 0$ sau $\underline{Z}_2 = \infty$ şi $-1 = -\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}$, adică $\underline{Z}_1 = 4\underline{Z}_2$.

În zona de trecere, coeficientul de fază este $b \neq$const şi poate fi determinat din relaţia $\cos b = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}$.

Deoarece $\cos b = 1 - 2\sin^2 \frac{b}{2}$, atunci

$$sh\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}. \qquad (7.6)$$

Semnul coeficientului "b" se determină din structura schemei filtrului.

b) Intervalul de oprire. Coeficientul de atenuare pentru zona de oprire are expresia ($a \neq 0$):

$$ch(a+jb)=1\pm\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2},$$

sau

$$cha\cos b+jsha\sin b=1\pm\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}. \qquad (7.7)$$

Deoarece $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ sunt impedanţele pur reactive de semne inverse, partea dreaptă a relaţiei (7.6) este totdeauna un număr real şi deci

$$sha\sin b=0.$$

În zona de oprire $a\neq 0$ şi sh $a\neq 0$, deci

$$\sin b=0$$

Deci avem

$$\cos b=1 \quad (b=0) \qquad (7.8)$$

sau

$$\cos b=-1 \quad (b=\pm\pi) \qquad (7.9)$$

Condiţia (7.8) se obţine dacă impedanţele $\underline{Z}_1$ şi $\underline{Z}_2$ au acelaşi caracter, ceea ce contrazice condiţiile structurii filtrelor.

Coeficientul de atenuare se determină din relaţia

$$cha=1+\frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2};$$

sau

$$sh\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}} \qquad \left(cha-1=2sh^2\frac{a}{2}\right),$$

iar coeficientul de fază din relaţia $\cos b=-1$ $(b=\pm\pi)$.

$b=\pi$, dacă filtrul este de tip trece - jos şi $b=-\pi$ pentru filtrul trece - sus.

## 7.3. Filtrul electric trece - jos

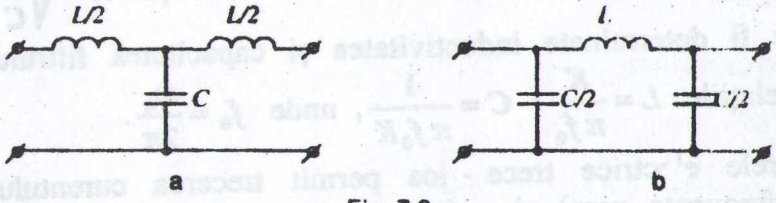



Fig. 7.2.

În fig. 7.2 sunt reprezentate filtrele electrice trece - jos în formă de "$T$" şi în formă de "$\Pi$" la care impedanţa $\underline{Z}_1$ are caracter inductiv, iar impedanţa $\underline{Z}_2$ - are caracter capacitiv.

Frecvenţa de tăiere se determină din relaţia $\underline{Z}_1 = 4\underline{Z}_2$ şi este egală $\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$. Coeficienţii de transfer pentru zonele respective au expresiile:

a) zona de trecere $a = 0$; $\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}$;

b) zona de oprire $b = \pi$ $sh\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}$

Caracteristicile sunt reprezentate în fig. 7.3.

Dependenţele $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt construite pentru o sarcină adoptată filtrului, adică $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$..

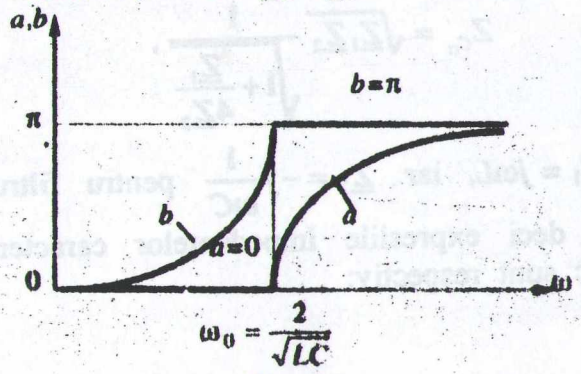



Fig. 7.3.

În acest caz se ştie că pulsaţia de tăiere are expresia $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ iar parametrul $K$ este dat de relaţia $K = \sqrt{\frac{L}{C}}$, atunci pot fi determinate inductivitatea şi capacitatea filtrului aplicând relaţiile $L = \frac{K}{\pi f_0}$; $C = \frac{1}{\pi f_0 K}$, unde $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Filtrele electrice trece - jos permit trecerea curentului continuu (frecvenţa zero) şi a frecvenţelor joase, sub o limită superioară şi atenuează puternic frecvenţele înalte.

### 7.4. Filtrul electric trece - jos în regim adaptat. Diagrama de fazori a filtrului

Filtrul electric se consideră în regim adaptat dacă impedanţa sarcinii şi impedanţa caracteristică a filtrului sunt egale între ele, adică $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$. La determinarea sarcinii adaptate este necesar să se analizeze caracteristicile de frecvenţă ale impedanţei caracteristice filtrului în formă de "$T$" şi în formă de "$\Pi$". În acest scop se scriu expresiile impedanţei caracteristice în funcţie de frecvenţă, reieşind din expresiile impedanţei caracteristice ale cuadripolului pasiv respectiv:

$$\underline{Z}_{C_T} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}, \qquad (7.10)$$

$$\underline{Z}_{C_\Pi} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}, \qquad (7.11)$$

unde $\underline{Z}_1 = j\omega L$, iar $\underline{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C}$ pentru filtrul electric trece - jos şi, deci expresiile impedanţelor caracteristice ale filtrului electric sunt respectiv:

$$\underline{Z}_{C_T} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\frac{\omega^2 LC}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \qquad (7.12)$$

$$\underline{Z}_{C_\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 LC}{4}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \qquad (7.13)$$

Pentru $\omega<\omega_0$ (zona de trecere) $\underline{Z}_{C_T}$ și $\underline{Z}_{C_\Pi}$ au caracter activ.

Pentru $\omega>\omega_0$ (zona de oprire) $\underline{Z}_{C_T}$ și $\underline{Z}_{C_\Pi}$ au caracter reactiv.

Făcând abstracție de faptul că expresiile (7.12) și (7.13) au pentru $\omega>\omega_0$ două valori pentru reactanța inductivă și capacitivă, caracterul impedanței caracteristice trebuie să fie ales respectiv pentru scheme în formă de "*T*" - caracter inductiv, iar pentru schema în formă de "*Π*" - caracter capacitiv. În caz contrar coeficientul "*a*" va avea caracter negativ, adică în zona de oprire ($\omega>\omega_0$) $\underline{U}_2$ și $\underline{I}_2$ sunt mai mari decât $\underline{U}_1$ și $\underline{I}_1$ de la intrare.

Pentru impedanța caracteristică activă coeficientul "*a*" nu poate fi negativ. Aceasta reiese din expresia:

$$a = \frac{1}{2}\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}\ln\frac{s_1}{s_2} = \ln\frac{U_1}{U_2},$$

$$\left(a = \frac{a}{2}+\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{U_1}{U_2}+\frac{1}{2}\ln\frac{I_1}{i_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Dacă $a<0$, atunci $p_1<p_2$, ceea ce contrazice fizica proceselor din circuitul electric.

Pentru impedanța caracteristică reactivă în regim adaptat cu sarcină pur reactivă, $p_2=0$ și $p_1=0$, iar puterea aparentă $S_2$ poate fi mai mare decât $S_1$ (cazul rezonanței).

În fig. 7.4 sunt prezentate graficele dependențelor $\underline{Z}_{C_T}(\omega)$ și $\underline{Z}_{C_\Pi}(\omega)$.

Din fig. 7.4 se vede că pentru filtrul în formă de "$T$" se poate obţine a=0 în zona de trecere numai atunci când impedanţa sarcinii este pur activă şi variază cu creşterea frecvenţei analog impedanţei caracteristice, de la valoarea $K=\sqrt{\frac{L}{C}}$ pentru $\omega=0$ până la zero pentru $\omega=\omega_0$. O concluzie analogă este valabilă şi pentru filtrul în formă de "П", unde $\underline{Z}_{C_\Pi}$ variază de la $K=\sqrt{\frac{L}{C}}$ până la infinit.

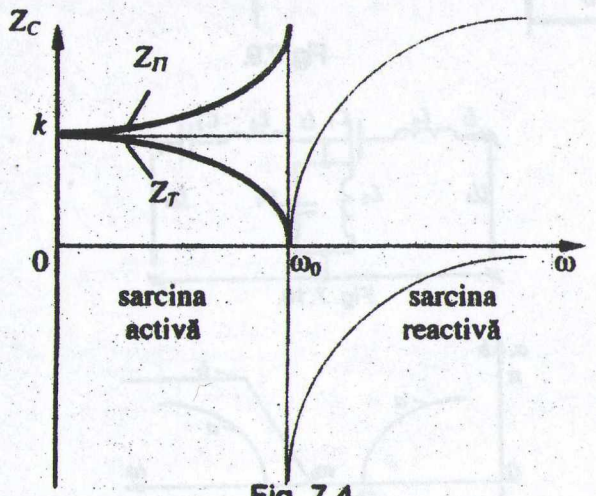



Fig. 7.4.

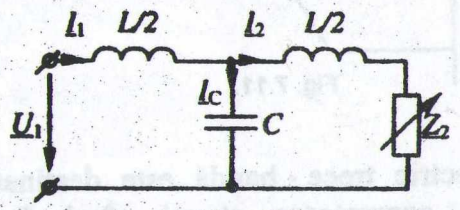



Fig. 7.5.

Deci pentru un regim adaptat, la variaţia impedanţei în funcţie de frecvenţă trebuie ca impedanţa sarcinii cu caracter activ să varieze în zona de trecere iar cea de caracter reactiv



în zona de oprire, ceea ce nu se poate face în realitate. În practică, sarcina activă se ia egală cu o valoare apropiată de "$K$", deoarece $Z_T$ şi $Z_P$ pentru o limită destul de mare a frecvenţelor în zona de trecere diferă puţin de valorile date Pentru a sarcină constantă $\underline{Z}_2$ se poate obţine un regim adaptat în zona de trecere numai la o singură frecvenţă.

Dacă la creşterea frecvenţei, impedanţa sarcinii variază corespunzător cu impedanţa caracteristică a filtrului în formă de "$T$" (fig.7.5), atunci impedanţa de la intrare a filtrului $Z_{intr}=\underline{Z}_{C_T}$ rămâne activă în zona de trecere. Aceasta înseamnă că $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$ sunt în fază şi deci circuitul este rezonant. Acordarea la rezonanţă pentru zona de trecere poate fi obţinută prin variaţia treptată a impedanţei sarcinii $Z_2$.

În fig. 7.6 este prezentată diagrama fazorială a curenţilor şi tensiunilor pentru un regim adaptat la o sarcină activă pentru una şi aceeaşi frecvenţă a zonei de trecere, iar în fig. 7.7 pentru o sarcină inductivă pentru una şi aceleaşi frecvenţă a zonei de oprire.

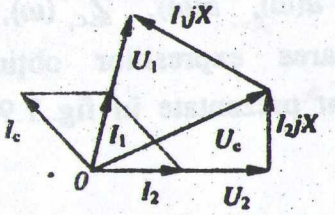



Fig. 7.6.

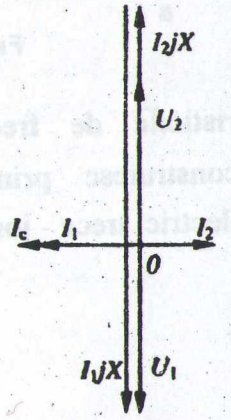



Fig. 7.7.

## 7.5. Filtrele electrice trece - sus, trece - bandă, opreşte – bandă

a) Filtrul electric trece - sus (fig. 7.8) are banda de trecere deasupra unei anumite frecvenţe, iar banda de atenuare sub ea este destinat să oprească semnalele de 50 Hz sau 100 Hz create de redresoare şi să permită trecerea semnalelor de frecvenţe înalte.

Zona de oprire $\omega=0+\omega_0$, unde $\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ - frecvenţa de tăiere.

Zona de trecere $\omega>\omega_0$.

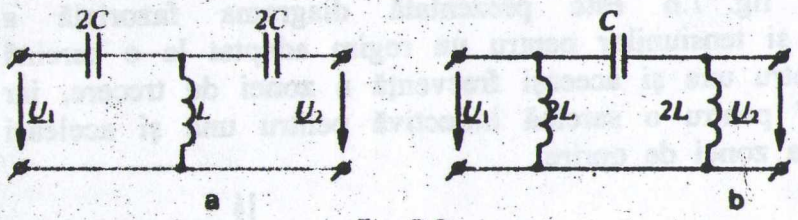



Fig. 7.8.

Caracteristicile de frecvenţă $a(\omega)$, $b(\omega)$, $\underline{Z}_{c_I}(\omega)$, şi $\underline{Z}_{c_{II}}(\omega)$ se construiesc prin aplicarea expresiilor obţinute pentru filtrul electric trece - jos şi sunt prezentate în fig. 7.9.

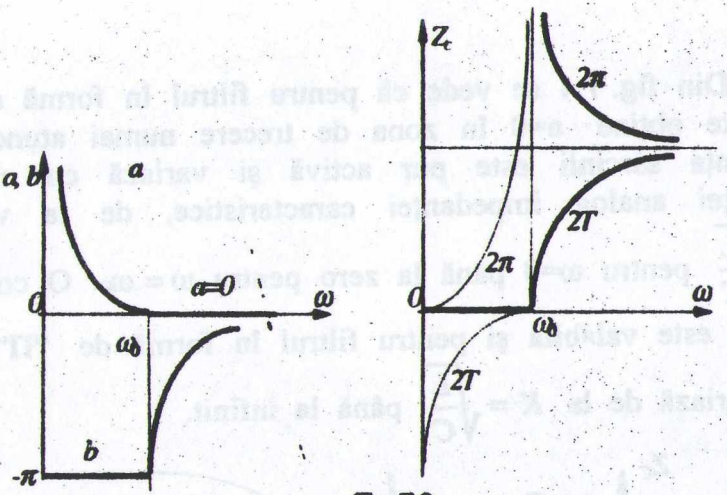



Fig. 7.9.

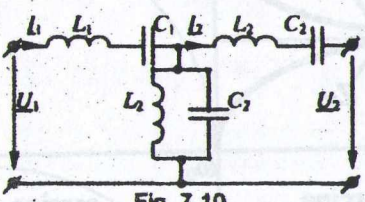



Fig. 7.10.

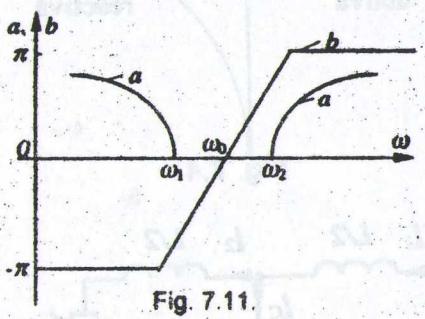



Fig. 7.11.

**b) Filtrul electric trece - bandă este destinat transmiterii semnalelor a unor generatoare atunci când fiecare semnal trebuie să fie recepționat de un receptor dat (legătura multiplucanal) și este constituit din impedanța longitudinală $Z_1$**

cu $L_1$ şi $C_1$ legate în serie şi impedanţa transversală $\underline{Z}_2$ cu $L_2$ şi $C_2$ legate în paralel (fig. 7.10). Caracteristicile de frecvenţă $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt prezentate în fig. 7.11. Filtrul trece bandă are banda de trecere a semnalelor în limita frecvenţelor de la $\omega_1 \neq 0$ până la $\omega_2 \neq \infty$ pentru care $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

c) Filtrul electric opreşte - bandă este destinat să oprească semnalele unei benzi de frecvenţe şi este constituit dintr-o impedanţa longitudinală $\underline{Z}_1$ cu $L_1$ şi $C_1$ legate în paralel şi impedanţă transversală $\underline{Z}_2$ cu $L_2$ şi $C_2$ legate în serie (fig. 7.12). Caracteristicile de frecvenţă $a(\omega)$ şi $b(\omega)$ sunt prezentate în fig. 7.13.

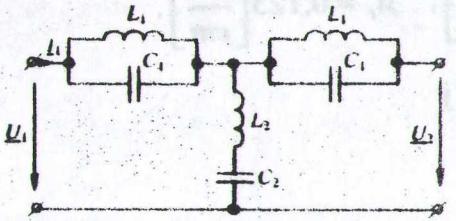


Fig. 7.12.

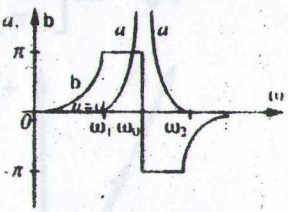


Fig. 7.13.

**Aplicaţia 1.** În fig. 7.14 este reprezentat filtrul trece - sus în formă de "$T$". Se cere să se determine frecvenţa la o sarcină adaptată, dacă $r_C = 300\ \Omega, C = 2 \cdot 10^3\ pF$, $L$=0,34 $mH$.

În prealabil se determină impedanţele filtrului

$$\underline{Z}_1 = -j\frac{1}{2\pi f 2C} = -j\frac{3{,}98 \cdot 10^7}{f},$$

$$\underline{Z}_2 = j2\pi fL = j2{,}13 \cdot 10^{-3} f.$$

Frecvenţa la o sarcină adaptată $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$ se determină cu relaţia

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc}} = 300\ \Omega \quad \text{sau} \quad \underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc} = 9 \cdot 10^4,$$

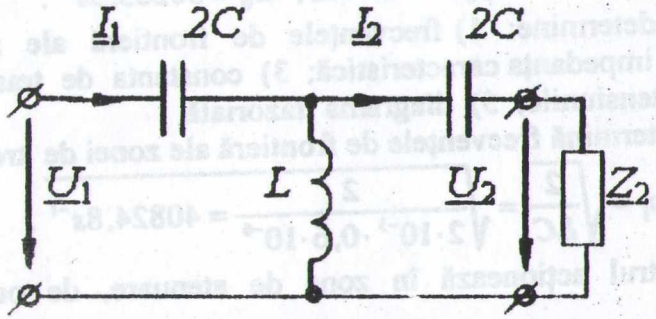



Fig 7.14

$$\underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = -j\frac{8,4\cdot10^4 f + 8,47\cdot10^4 f^2 - 16\cdot10^4}{f\left(-3,97\cdot10^7 + 2,13\cdot10^{-3} f^2\right)}.$$

Înlocuind $\underline{Z}_{10}$ și $\underline{Z}_{1sc}$ în expresia de mai sus, se obține

$$\frac{2,13\cdot10^{-3} f - 8,47\cdot10^4}{f\left(2,13\cdot10^{-3} f^2 - 3,97\cdot10^7\right)} = 9\cdot10^4,$$

de unde $f$=139$kHz$.

**Aplicația 2.** În fig. 7.15 este reprezentat filtrul trece - jos în formă de "*Π*" conectat la o sarcină adaptată la frecvența "*f*". Date numerice $\underline{U}_1 = 100e^{j20^\circ}, V$, $L = 2\cdot10^{-3}, H$,

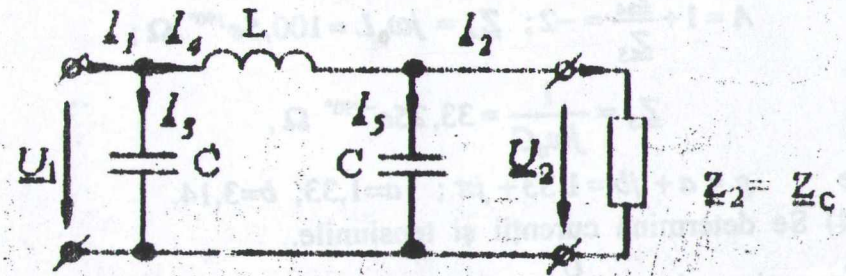



Fig 7.15

$C = 0,6 \cdot 10^{-6}, F$, $f_0 = 8 \cdot 10^3 Hz$, $\omega_0 = 50265,5 s^{-1}$.

Să se determine: 1) frecvenţele de frontieră ale zonei de trecere; 2) impedanţa caracteristică; 3) constanta de transfer; 4) curenţii şi tensiunile; 5) diagrama fazorială.

1) Se determină frecvenţele de frontieră ale zonei de trecere

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}} = 40824,8 s^{-1}.$$

Deci filtrul acţionează în zona de atenuare, de oarece $\omega_0 > \omega_1$.

Deci frecvenţele de frontieră sunt $\omega_1 = 0 + 40824 s^{-1}$.

2) Impedanţa caracteristică se determină din relaţia

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{100,5 e^{j90^\circ}}{0,031 e^{j90^\circ}}} = 56 e^{j90^\circ}\ \Omega,$$

unde $$B = \underline{Z}_4 = j\omega_0 L = 100,5 e^{j90^\circ}\ \Omega$$

$$C = \frac{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 \underline{Z}_6} = \frac{j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} + \frac{1}{j\omega_0 C}}{\frac{1}{j\omega_0 C} + \frac{1}{j\omega_0 C}} = 0,031 e^{-j90^\circ}\ \Omega$$

3) Se determină constanta de transfer

$$g = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right) = a + jb = 1,33 + j\pi,$$

unde $$A = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5} = -2;\ \underline{Z}_4 = j\omega_0 L = 100,5 e^{j90^\circ}\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{1}{j\omega_0 C} = 33,25 e^{-j90^\circ}\ \Omega,$$

de unde $g = a + jb = 1,33 + j\pi$; $a$=1,33; $b$=3,14.

4) Se determină curenţii şi tensiunile.

În regim adaptat $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = e^g$, de unde

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{e^{\underline{a}}} = \frac{100e^{j20^\circ}}{e^{1,33}e^{j180^\circ}} = 27,25e^{-j160^\circ}\ V$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = 1,76e^{j110^\circ}\ A;\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 e^{-\underline{a}} = 0,48e^{-j70^\circ}\ A;$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_5} = 3,01\ e^{j110^\circ}\ A;\ \underline{I}_4 = \underline{I}_1 - \underline{I}_3 = 1,26e^{-j70^\circ}\ A;$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_6} = 0,81e^{-j70^\circ}\ A;\ \underline{U}_4 = \underline{I}_4\underline{Z}_4 = 126,3e^{j20^\circ}\ V.$$

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 7.16 cu scările $\mu_U = 20\left[\frac{V}{cm}\right]$; $\mu_I = 0,125\left[\frac{A}{cm}\right]$.

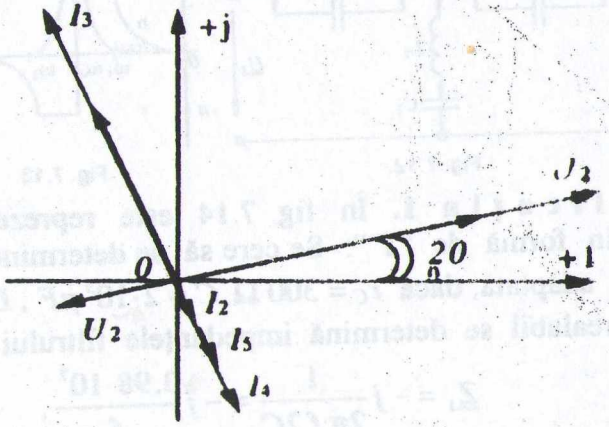



Fig 7.16.

# CIRCUITE ELECTRICE CU PARAMETRII DISTRIBUIŢI

## 8. LINII ELECTRICE LUNGI ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 8.1. Ecuaţiile unei linii omogene

În studiul proceselor electromagnetice produse în liniile de transport ale energiei electrice (în electroenergetică), cum şi în liniile telefonice şi telegrafice (în telecomunicaţii), trebuie să se ia în vedere că câmpurile magnetice şi electrice legate de aceste linii sunt repartizate de-a lungul întregii linii şi că transformarea energiei electromagnetice în căldură se produce , de asemenea , de-a lungul întregii linii. Circuitele electrice de acest gen, spre deosebire de circuitele cu parametri concentraţi, se numesc circuite cu parametri distribuiţi.

La studiul liniilor trebuie să se ţină seama atât de rezistenţa conductoarelor liniei , cât şi de faptul că de această linie este legat câmpul magnetic şi că, prin urmare, linia are o inducanţă. Pe lângă aceasta, trebuie să se ia în vedere că între conductoarele liniei există un câmp electric şi că, prin urmare, linia reprezintă un condensator, ale cărui armături sunt formate de conductoarele liniei. Trebuie să se ia în consideraţie faptul că, datorită imperfecţiei izolaţiei, conductanţa între conductoarele liniei nu este nulă.

În fig. 8.1 se consideră o linie bifilară de lungimea $l$, constituită din două conductoare paralele, distanţa de la începutul liniei până la o secţiune oarecare a acesteia se notează cu $X$. Linia bifilară se caracterizează prin următorii parametri primari:

$R_0$ - rezistenţa electrică totală a acestor două conductoare, raportată la unitatea de lungime a liniei $\left[\frac{\Omega}{m}\right]$;

$L_0$ - inductivitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei $\left[\frac{H}{m}\right]$;

$C_0$ - capacitatea sistemului de două conductoare pe unitatea de lungime a liniei $\left[\frac{F}{m}\right]$;

$G_0$ - conductanța de pierderi a izolantului dintre conductoare pe unitatea de lungime a liniei $\left[\frac{S}{m}\right]$.

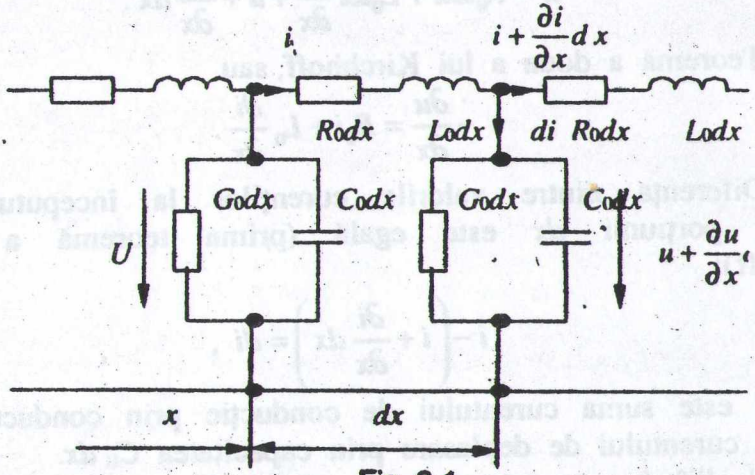



Fig. 8.1

Dacă parametrii primari se pot considera constanți de-a lungul liniei , se spune că linia este o linie omogenă. În cele ce urmează se vor face referiri la circuite (linii) omogene și liniare.

În fig. 8.1 se consideră o porțiune de linie elementară (un tronson) de lungime infinitezimală *dx*, pentru care parametrii ($R_0\,dx$, $L\,dx$, $C_0\,dx$, $G_0\,dx$) se pot considera concentrați. Dacă se notează cu *u* și *i* tensiunea și curentul la distanța *x* de la începutul liniei (bornele de intrare *1-1'*), în

secţiunea de la distanţa $(x + l dx)$ aceste mărimi sunt: $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$ şi $\left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right)$.

Examinând o porţiune de linie cu lungimea $\partial x$, vedem că, pe această porţiune, căderea de tensiune trebuie să aibă două componente: $r\,dxi$, care învinge rezistenţa acestei porţiuni şi $L\,dx\frac{\partial i}{\partial x}$, care echilibrează f.e.m. de inducţie proprie, ce apare pe această porţiune, adică:

$$u = R_0 dxi + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial x} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx .$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff, sau

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial x} .$$

Diferenţa dintre valorile curenţilor la începutul şi sfârşitul porţiunii $dx$ este egală (prima teoremă a lui Kirchhoff):

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) = di ,$$

unde $di$ este suma curentului de conducţie prin conductanţa $G_0\,dx$ şi curentului de deplasare prin capacitatea $C_0\,dx$.

Neglijînd componentele mici de ordinul doi:

$$di = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) G_0\, dx + \frac{\partial C_0\, dx}{\partial t}\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)$$

$G_0 \frac{\partial u}{\partial x}(dx)^2$, $C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(dx)^2$, obţinem: $di = uG_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} dx$

Deci, avem:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = uG_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ sau } -\frac{\partial i}{\partial x} = uG_0 + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Am obţinut două ecuaţii diferenţiale în derivate parţiale:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}, & (8.1) \qquad (8.1) \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}. & (8.2) \qquad (8.2) \end{cases}$$

Aceste ecuaţii permit ca în condiţiile iniţiale şi de limită date, să se determine tensiunea şi curentul în linie ca funcţii de $x$ şi $t$, adica $u(x, t)$ şi $i(x,t)$.

## 8.2. Rezolvarea ecuaţiilor liniei omogene în cazul regimului sinusoidal permanent

Să presupunem că la borne este aplicată o tensiune sinusoidală, a cărei frecvenţă unghiulară este egală cu $\omega$. În acest caz toţi curenţii şi toate tensiunile din linie vor fi , de-asemenea , funcţii sinusoidale de timp de aceiaşi frecvenţă. Aplicând metoda simbolică, vom avea:

imaginea curentului

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Big( \underline{I} e^{j\omega t}, \text{unde } \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}.$$

imaginea tensiunii

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow \underline{U} e^{j\omega t}, \text{unde} \underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u}.$$

Valorile eficace complexe ale curentului şi tensiunii sunt funcţii dependente numai de $X$, iar $e^{j\omega t}$ este fincţie numai de timp.

Reprezentarea imaginilor curentului şi tensiunii în forma produsului din doi factori, unul dintre care este funcţie de timp, iar al doilea funcţie de „$x$" ne dă posibilitatea de a trece de la ecuaţiile diferenţiale în derivate parţiale în ecuaţii de diferenţiale cu derivate obişnuite.

Într-adevăr

$$\frac{\partial u}{\partial x} \to e^{j\omega t}\frac{d\underline{U}}{dx};\ L_0\frac{\partial i}{\partial t} \to L_0\underline{I}\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega L_0 \cdot \underline{I}e^{j\omega t};$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} \to e^{j\omega t}\cdot\frac{d\underline{I}}{dx};$$

$$C_0\frac{\partial u}{\partial t} = C_0\underline{U}\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega C_0 e^{j\omega t}.$$

Introducând expresiile obţinute în ecuaţiile (8. 1) şi (8. 2), avem:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\underline{U}}{dx} = \underline{Z}_0\underline{I}, & (8.3) \\ -\dfrac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Y}_0\underline{U}. & (8.4) \end{cases}$$

unde $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0;\ \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0.$

La obţinerea ecuaţiei diferenţiale faţă de $\underline{U}$, luăm derivata faţă de "$x$" de la (8.3).

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0\dfrac{d\underline{I}}{dx}, & (8.5) \\ -\dfrac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Y}_0\underline{U}. & (8.6) \end{cases}$$

Introducând $\dfrac{d\underline{I}}{dx}$ în ( 8.5 ), avem :

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0\underline{Y}_0\underline{U}. \qquad (8.7)$$

Ecuaţia (8.7) prezintă ecuaţia diferenţială liniară de ordinul doi cu soluţia:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x}, \qquad (8.8)$$

unde $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ - constantele de integrare, numere complexe. Aceste constante se determină prin aplicarea condiţiilor de la intrare în linie (prin $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$) sau de la ieşire ($\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$).

$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$ - constanta de propagare, număr complex; constanta $\gamma$ se prezintă în forma:

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

unde: $\alpha$ - este coeficientul de atenuare , ce caracterizează atenuarea undei incidente pe o unitate de lungime $\left(\frac{1}{m}\right)$;

$\beta$ - este coeficientul de fază, ce caracterizează schimbarea fazei undei incidente pe o unitate de lungime $\left(\frac{rad}{m}\right)$.

Ecuaţia diferenţială pentru $\underline{I}$ se obţine din (8.3):

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_0}\left(-\frac{D\underline{U}}{dx}\right) = \frac{\underline{A}_2 e^{-\gamma x} - \underline{A}_1 e^{\gamma x}}{\frac{\underline{Z}_0}{\gamma}}.$$

Notăm : $\frac{\underline{Z}_0}{\gamma} = \frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{Z}_c = z_c e^{j\varphi_c}$ - impedanţa caracteristică complexă.

Deci, avem:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x}. \qquad (8.9)$$

### 8.3. Constanta de propagare şi impedanţa caracteristică

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}; \qquad (8.10)$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_c}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \qquad (8.11)$$

a) Linia de curent continuu, $\omega = 0$:

$$\gamma = \sqrt{R_0 G_0}\,; Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}.$$

b) Linia fără pierderi, adică $R_0=0$; $G_0=0$;

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j\beta;\ \alpha = 0;\ Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

c) Linia cu pierderi mici, adică $\frac{R_0}{\omega L_0} << 1$ şi $\frac{G_0}{\omega C_0} << 1$

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_0 C_0}\left(1 - j\frac{R_0}{\omega L_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - j\frac{G_0}{\omega C_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (8.12)$$

sau

$$\gamma \approx \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} + j\omega\sqrt{L_0 C_0}\,, \qquad (8.13)$$

unde :

$$\alpha = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \qquad (8.14)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$$

$$Z_c \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left[1 + j\left(-\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0}\right)\right]. \qquad (8.15)$$

Expresia (8.13) este obţinută prin aplicarea descompunerii binomului (8.12) în serie $\left(\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}\right)$.

**8.4. Formulele pentru determinarea $\underline{U}$, $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin $\underline{U}_1$, $\underline{I}_1$ de la intrare în linie (fig. 8.2)**

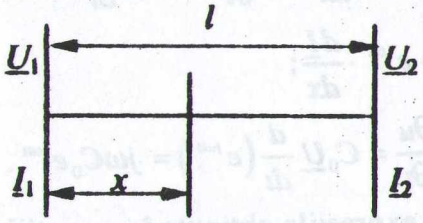



Fig. 8.2.

Aplicăm ecuațiile:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} & (8.16) \\ \underline{I} = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} & (8.17) \end{cases}$$

Considerăm că pentru $x = 0$: $\underline{U} = \underline{U}_1$; $\underline{I} = \underline{I}_1$.

adică :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2, \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_c = \underline{A}_2 - \underline{A}_1. \end{cases}$$

de unde :

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2} = \underline{A}_2 e^{j\psi_i},$$

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2} = \underline{A}_1 e^{j\psi_r},$$

unde : $A_2$ este modulul și $\psi_i$ argumentul $\underline{A}_2$;

$A_1$ este modulul și $\psi_r$ argumentul $\underline{A}_1$.

Introducând expresiile pentru A1 și A2 în ecuațiile (8.16) și (8.17) obținem:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2} e^{\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2} e^{-\gamma x} = \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2},$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c}{2\underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}.$$

Introducând funcţiile hiperbolice:

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{şi} \quad sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

avem:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 ch\gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_c sh\gamma x, \tag{8.18}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 ch\gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} sh\gamma x. \tag{8.19}$$

Formulele (8.18) şi (8.19) ne permit să determinăm valorile eficace ale tensiunii şi curentului în orice punct al liniei prin $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$.

### 8.5. Formulele pentru determinarea $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$ de la ieşire din linie (fig. 8.3)

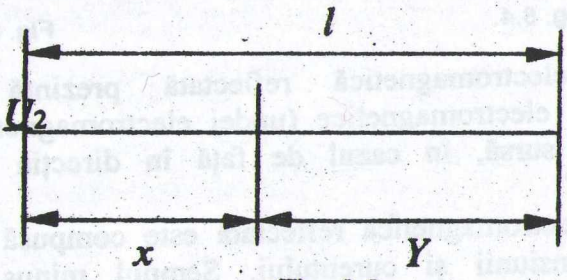



Fig. 8.3

Notăm distanţa de la un punct oarecare al liniei până la capătul liniei prin "*Y*" şi lungimea liniei prin "*l*".

Deci $Y = l - x$

Aplicăm ecuaţiile (8.16) şi (8.17).

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x}, \\ \underline{I} = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Considerăm că pentru $x = l$: $\underline{U} = \underline{U}_2$; $\underline{I} = \underline{I}_2$.

Deci:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_1 e^{\gamma l} + \underline{A}_2 e^{-\gamma l}, \\ \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma l} - \dfrac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma l}. \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_2 e^{-\gamma l} + \underline{A}_1 e^{\gamma l}, \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_c = \underline{A}_2 e^{-\gamma l} - \underline{A}_1 e^{\gamma l}. \end{cases}$$

De unde:

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{-\gamma l} = A_1 e^{j\psi_1},$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{2} e^{\gamma l} = A_2 e^{j\psi_2}.$$

Introducând expresiile pentru $\underline{A}_1$ şi $\underline{A}_2$ în ecuaţiile (8.16) şi (8.17) şi înlocuind $(l - x)$ prin $Y$ opţinem:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 ch\gamma Y + \underline{I}_2 \underline{Z}_c sh\gamma Y. \qquad (8.20)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma Y + \underline{I}_2 sh\gamma Y. \qquad (8.21)$$

Formulele (8.20) şi (8.21) ne permit să determinăm $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$ de la capătul liniei.

## 8.6. Unda incidentă şi unda reflectată în linie

Fie că avem expresiile pentru $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ în orice punct al liniei prin constantele $\underline{A}_1$ şi $\underline{A}_2$, adică

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x}, \tag{8.22}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x}, \tag{8.23}$$

unde $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_r}$; $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_i}$; $e^{\gamma x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}$; $e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$;

$\underline{Z}_c = Z_c e^{j\varphi_c}$

Introducând expresiile acestea în (8.22) şi (8.23), avem:

$$\underline{U} = A_1 e^{j\psi_r} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} + A_2 e^{j\psi_i} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}, \tag{8.24}$$

$$\underline{I} = \frac{A_2 e^{j\psi_i} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}}{Z_c e^{j\varphi_c}} - \frac{A_1 e^{j\psi_r} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}}{Z_c e^{j\varphi_c}}. \tag{8.25}$$

Înmulţind partea stângă şi partea dreaptă a ecuaţiilor (8.24) şi (8.25) cu $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ şi aplicând formula lui Euler obţinem expresia valorii momentane a tensiunii şi curentului:

$$u = \sqrt{2}A_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_r + \beta x) + \sqrt{2}A_2 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_i - \beta x), \tag{8.26}$$

$$i = -\frac{\sqrt{2}A_1}{Z_c} e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_r + \beta x - \varphi_c) + \frac{\sqrt{2}A_2}{Z_c} e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_i - \beta x - \varphi_c) \tag{8.27}$$

sau

$$\begin{cases} u = u_r + u_i; \\ i = -\dfrac{u_r}{Z_c} + \dfrac{u_i}{Z_c}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u_i + u_r; \\ i = i_i + i_r. \end{cases}$$

**Unda electromagnetică prezintă suma undei electromagnetice incidente şi undei electromagnetice reflectată.**

**Unda electromagnetică incidentă prezintă procesul deplasării stării electromagnetice (undei electromagnetice) de la sursă de energie la consumator, în cazul de faţă în direcţia creşterii coordonatei "x". Starea electromagnetică se determină**

prin ansamblul câmpurilor electrice şi magnetice.Unda incidentă deplasându-se de la sursă spre consumator conţine energie determinată de energia câmpului electric şi magnetic:

$$\left( W = W^{(e)} + W^{(m)} = \frac{C U^2}{2} + \frac{L i^2}{2} \right).$$

Unda electromagnetică incidentă este compusă din unda incidentă a tensiunii şi unda incidentă a curentului. În fig. 8.8. este prezentat graficul repartizării tensiunii undei incidente pentru momentele de timp: $t_1$ şi $t_2 < t_1$. La construcţia graficului se consideră $\omega t_1 + \psi_i = 0$.

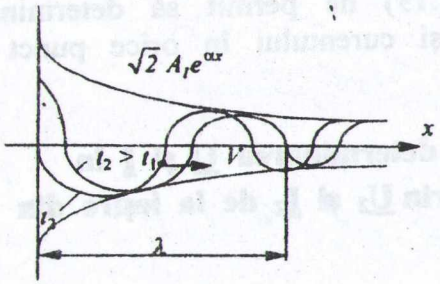



Fig. 8.4.

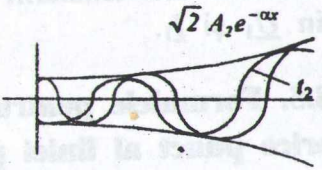



Fig. 8.5.

Unda electromagnetică reflectată prezintă procesul deplasării stării electromagnetice (undei electromagnetice) de la consumator la sursă, în cazul de faţă în direcţia micşorării coordonatei "$x$".

Unda electromagnetică reflectată este compusă din unda reflectată a tensiunii şi curentului. Semnul minus la unda reflectată a curentului caracterizează cazul mişcării fluxului de energie în direcţia opusă mişcării fluxului de energie pentru unda incidentă. În fig. 8.5. este prezentat graficul reprezentării tensiunii undei reflectate pentru momentele de timp: $t_1$ şi $t_2 > t_1$.

Componentele undelor incidentă şi reflectată reprezintă funcţii sinusoidale amplitudinile cărora se micşorează cu creşterea lui "$x$" (factorul $e^{-\alpha x}$), sau cu descreşterea lui "$x$" (factorul $e^{\alpha x}$). Argumentul este funcţie de timp şi de coordonată.

## 8.7 Coeficientul de reflexie. Viteza de fază. Lungimea undei

a) Coeficientul de reflexie $K$ se defineşte prin raportul dintre expresiile în complex ale componentei tensiunii inverse (reflectate) $\underline{U}_{2r}$ şi componentei tensiunii directe (incidente) $\underline{U}_{2i}$ pentru sfârşitul liniei ($X=0$). Ţinând seama de relaţiile:

$$\underline{U}_r = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2}{2} e^{\gamma x}; \qquad \underline{U}_i = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma x};$$

$$\underline{I}_r = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2}{2} e^{\gamma x}; \qquad \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{2} e^{-\gamma x},$$

şi introducând $X=0$ se obţine expresia:

$$\underline{K}_r = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2r}} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c}, \tag{8.28}$$

şi , de asemenea : $\underline{K}_r = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2r}} = \frac{\underline{I}_{2i}}{\underline{I}_{2r}}$.

În general coeficientul de reflexie este o mărime complexă, modulul său fiind egal cu raportul valorilor absolute ale amplitudinilor undei reflectate şi incidente, la sfârşitul liniei.

Se consideră câteva cazuri particulare.

Presupunem linia în scurtcircuit la sfârşitul ei ($\underline{Z}_2=0$), coeficientul de reflexie rezultă egal cu $\underline{K}_r = -1$. Aceasta înseamnă că în acest caz la sfârşitul liniei ($Y=0$) tensiunea reflectată este egală şi opusă tensiunii incidente ($\underline{U}_{2i} = -\underline{U}_{2r}$), iar curentul reflectat este egal cu cel incident ($\underline{I}_{2i} = \underline{I}_{2r}$). Dacă linia la sfârşitul ei este în gol ($\underline{Z}_2 = \infty$) coeficientul de reflexie este egal cu $\underline{K}_r = 1$, ceea ce înseamnă că $\underline{U}_{2i} = \underline{U}_{2r}$ şi $\underline{I}_{2i} = -\underline{I}_{2r}$.

b) Viteza de fază - reprezintă viteza cu care trebuie să ne deplasăm de-a lungul liniei pentru a observa una şi aceiaşi fază a oscilaţiei.

Pentru $U_i = \sqrt{2} A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_i - \beta x)$, avem :

$$\omega t + \psi_i - \beta x = const .$$

Luând derivata de timp de la ultima expresie, obţinem:

$$\omega = \beta \frac{dx}{dt}, \quad \text{unde} \quad \frac{dx}{dt} = V_f .$$

Deci

$$V_f = \frac{\omega}{\beta}. \tag{8.29}$$

c) Lungimea undei $\lambda$ - prezintă distanţa la care se deplasează unda într-o perioadă de timp $T = \frac{1}{x}$:

$$\lambda = VT = \frac{V}{f} = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{8.30}$$

### 8.8 Linia fără distorsiuni

Faptul că $\alpha$ şi $V$ sunt funcţii de frecvenţă, produce distorsiunea vorbirii în liniile telefonice lungi şi distorsiunea semnalelor în liniile telegrafice lungi, deoarece, în aceste cazuri, curentul conţine întotdeauna armonice superioare. La propagarea undei de curent de-a lungul liniei, raportul dintre amplitudinile armonicilor variază, deoarece pentru ele constantele de amortizare sunt diferite. Pe lângă aceasta, forma undei de curent suferă o schimbare şi datorită faptului că armonicile au viteze de fază diferite. În cazul particular când $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$ avem:

$$\alpha = \sqrt{R_0 C_0}; \qquad \beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}; \qquad V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}},$$

adică $\alpha$ şi $V$ nu depind de frecvenţă. În acest caz distorsiunile menţionate dispar şi, de aceea, astfel de linii se numesc linii fără distorsiuni. Pentru $\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}$ se obţine valoarea minimă pentru $\alpha$, ceea ce îmbunătăţeşte , de asemenea , transmisiunea telefonică şi telegrafică.

Din expresiile modulului $Z$ şi a argumentului $\varphi_c$ ale impedanţei caracteristice $\underline{Z}_c$ pentru $\frac{R_0}{L_0}=\frac{G_0}{C_0}$ sau $R_0C_0=G_0L_0$, avem :

$$Z_c=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \text{iar} \quad \varphi_c=0,$$

adică în linia fă : distorsiuni $\underline{Z}$ este un număr real.

### 8.9 Linia adaptivă. Randamentul liniei în regim adaptat

Un caz important se referă la situaţia în care impedanţa receptorului este egală tocmai cu impedanţa caracteristică a liniei. Din relaţia (8.28) rezultă că, pentru $\underline{Z}_2=\underline{Z}_c$ se obţine $\underline{K}_r=0$, ceea ce înseamnă că nu există unde reflectate, ca şi în cazul unei linii de lungime infinită. O linie la a cărei extremitate este conectat un receptor având impedanţa egală cu impedanţa caracteristică se numeşte linie adaptată. O caracteristică pentru acest caz o constituie faptul că în orice secţiune a liniei raportul dintre tensiunea complexă şi curentul complex este egal cu impedanţa caracteristică $\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}=\underline{Z}c\right)$.

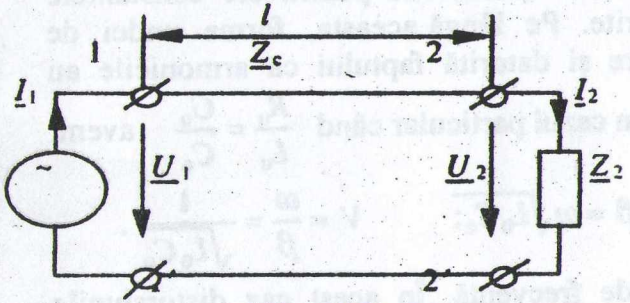


Fig. 8.6

În realitate, dacă constanta de integrare $\underline{A}_1$ este egală cu zero, atunci unda reflectată va lipsi.

$$\underline{A}_1=\frac{\underline{U}_2-\underline{I}_2\underline{Z}_2}{2}e^{-\gamma l}=\frac{\underline{U}_2-\underline{U}_2}{2}e^{-\gamma l}=0.$$

Pentru obținerea formulelor la determinarea tensiunii și curentului în orice punct al liniei, la distanța $Y$ de la capătul liniei, în formulele

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 ch\gamma Y + \underline{I}_2 \underline{Z}_c sh\gamma Y, & (8.31) \\ \underline{I} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh\gamma Y + \underline{I}_2 ch\gamma Y, & (8.32) \end{cases} \qquad (8.31) \quad (8.32)$$

se înlocuește $\underline{Z}_c$ prin $\underline{Z}_2$, iar $\underline{I}_2 \underline{Z}_2$ prin $\underline{U}_2$ și $\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$ prin $\underline{I}_2$.

Astfel obținem:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 (ch\gamma Y + sh\gamma Y) = \underline{U}_2 e^{\gamma Y}, \qquad (8.33)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 (sh\gamma Y + ch\gamma Y) = \underline{I}_2 e^{\gamma Y}. \qquad (8.34)$$

Penru $Y = l$, avem:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 e^{\gamma l} = U_2 e^{j\varphi_{U_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 e^{\gamma l} = I_2 e^{j\varphi_{I_2}} e^{\alpha l} e^{j\beta l} \end{aligned}\right\}, \qquad (8.35)$$

unde $U_2$ - este modulul tensiunii iar $\varphi_{U_2}$ - argumentul complexului $\underline{U}_2$;

$I_2$ - este modulul curentului, iar $\varphi_{I_2}$ - argumentul complexului $\underline{I}_2$.

E știut, că randamentul se determină prin raportul puterii active de la capătul liniei $P_2$ la puterea activă de la începutul liniei $P_1$, adică: $\eta = \dfrac{P_2}{P_1}$, (8.36)

unde: $P_2 = U_2 I_2 \cos(\varphi_{U_2} - \varphi_{I_2}) = U_2 I_2 \cos\varphi_c$

$\varphi_c$ - argumentul impedanței caracteristice $\underline{Z}_c$.

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_c = U_2 I_2 e^{2\alpha l} \cos\varphi_c.$$

Deci în regim adaptat, avem:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \qquad (8.37)$$

### 8.10. Impedanţa de intrare

Expresia impedanţei de intrare a liniei $\underline{Z}_{intr.} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$ pentru o anumită impedanţă de sarcină conectată la sfârşitul liniei $\left(\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)$, se poate stabili şi direct pe baza teoriei cuadripolului. Se obţine expresia:

$$\underline{Z}_{intr.} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 ch\gamma l + \underline{Z}_c sh\gamma}{ch\gamma + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c th\gamma l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 th\gamma} \quad (8.38)$$

Particularizând această relaţie pentru $\underline{Z}_2 = \infty$ şi $\underline{Z}_2 = 0$ se obţin impedanţele în gol $(\underline{Z}_{10})$ şi

n scurtcircuit $(\underline{Z}_{1sc})$ ale liniei. Expresiile acestor impedanţe sunt:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{Z}_c}{th\gamma l}, \quad (8.39)$$

$$\underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{I}_{1sc}} = \underline{Z}_c th\gamma l \,. \quad (8.40)$$

Ţinând seama de aceste relaţii se obţin şi relaţiile:

$$\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_c^{\,2}; \quad \text{şi} \quad \frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}} = th^2\gamma l \,. \quad (8.41)$$

Presupunând cunoscute, respectiv determinate pe cale experimentală, impedanţele în gol şi scurtcircuit, relaţiile (8.41) permit determinarea simplă a parametrilor caracteristici ai liniei respective $(\underline{Z}_c, \gamma l)$:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc}} = Z_c e^{j\varphi_c}, \quad th\gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}}},$$

$$e^{2\gamma l} = \frac{1 + th\gamma l}{1 - th\gamma l} = We^{j\zeta},$$

sau $$e^{\alpha l} e^{j\beta l} = We^{j\zeta}$$

de unde: $e^{2\alpha l} = W;\ 2\alpha l = \ln W;\ \alpha = \frac{1}{2l}\ln W;\ e^{j2\beta l} = e^{j\zeta};\ \beta l = \frac{\zeta}{2} + \pi$

Pentru linia fără pierderi $\left(\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, expresia impedanței de intrare devine:

$$\underline{Z}_{intr.} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 \cos\beta l + j\underline{Z}_c \sin\beta l}{\underline{Z}_c \cos\beta l + j\underline{Z}_2 \sin\beta l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_c tg\beta l}{\underline{Z}_c + j\underline{Z}_2 tg\beta l} =$$

$$= \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 \cos\frac{2\pi}{\lambda} l + j\underline{Z}_c \sin\frac{2\pi}{\lambda} l}{\underline{Z}_c \cos\frac{2\pi}{\lambda} l + j\underline{Z}_2 \sin\frac{2\pi}{\lambda} l}. \qquad (8.42)$$

Dacă lungimea liniei fără pierderi este egală cu jumătate de lungime de undă $l = \frac{\lambda}{2}$ (sau un multiplu de jumătăți de lungimi de undă), se obține $\underline{Z}_{intr.} = \underline{Z}_2$. Dacă $l = \frac{\lambda}{4}$, impedanța de intrare este:

$$\underline{Z}_{intr.} = \frac{\underline{Z}_c^2}{\underline{Z}_2}. \qquad (8.43)$$

Ținând seama de faptul că la o linie fără pierderi impedanța caracteristică are caracter rezistiv $\left(\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$, rezultă că în acest caz particular (relația 8.43) linia are proprietatea de inversare a impedanțelor. Dacă, de exemplu, impedanța receptorului ($\underline{Z}_2$) are caracter capacitiv, impedanța de intrare va avea caracter inductiv și invers. Deci, impedanța de intrare a unei linii fără pierderi, considerată în regimuri extreme (gol și scurtcircuit) prezintă proprietăți interesante. Astfel, din punct de vedere aplicativ în domeniul frecvențelor înalte, este interesant de relevat faptul că astfel de linii, în lungimea

de ordinul de mărimi până la $\frac{\lambda}{2}$ se comportă ca elemente reactive de circuit, cu caracter inductiv sau capacitiv şi parametri echivalenţi variabili de limite foarte largi în funcţie de lungimea lor. Pentru linii de lungime mai mare proprietăţile se repetă periodic la fiecare $\frac{\lambda}{2}$.

## 8.11. Linii fără pierderi

În anumite cazuri, în special în cazul frecvenţelor înalte, când $\omega L_0 > R_0$ şi $\omega C_0 >> G_0$, pierderile în linie se pot neglija şi putem presupune în acest caz, $\alpha = 0, \gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$, $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ şi multe dintre relaţiile obţinute înainte se vor simplifica:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta Y + j\underline{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta Y , \qquad (8.44)$$

$$\underline{I} = j\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta Y + \underline{I}_2 \cos \beta Y . \qquad (8.45)$$

La mersul în gol al liniei, când $\underline{Z}_2 = \infty$ şi $\underline{I}_2 = 0$, avem:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_{20} \cos \beta Y \\ \underline{I} &= j\frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}_c} \sin \beta Y \end{aligned}\right\} . \qquad (8.46)$$

În regim scurtcircuit al liniei, când $\underline{Z}_2 = 0$ şi $\underline{U}_2 = 0$, avem:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= j\underline{I}_{2sc} \underline{Z}_c \sin \beta Y \\ \underline{I} &= \underline{I}_{2sc} \cos \beta Y \end{aligned}\right\} . \qquad (8.47)$$

## 8.12. Undele electromagnetice staţionare

În linia fără pierderi la mers în gol sau în scurtcircuit, dea semenea , la o sarcină pur reactivă apar unde electromagnetice staţionare.

Unda electromagnetică staţionară prezintă unda obţinută ca rezultat al suprapunerii undei incidente şi undei electromagnetice reflectate de aceeaşi mărime, ce se deplasează în direcţii opuse. Unda electromagnetică staţionară este determinată de unda tensiunii şi unda curentului. Din punct de vedere matematic unda staţionară a tensiunii şi unda staţionară a curentului se descriu prin produsul a două funcţii periodice (trigonometrice). Una dintre funcţii este funcţie de coordonata "$\beta X$", iar a doua este funcţie de timp "$\omega t$". Unda staţionară a tensiunii şi unda staţionară a curentului totodată sunt defazate în spaţiu şi în timp.

Defazajul în timp dintre unda staţionară a tensiunii şi unda staţionară a curentului este egal cu $90^0$. Defazajul în spaţiu alcătuieşte $\frac{1}{4}\lambda$ din lungimea undei. Punctele liniei prin care funcţia periodică de coordonată trece prin zero, se numesc noduri, iar punctele în care funcţia periodică de coordonată are valoare maximală, se numesc ventre. Deosebim noduri de tensiune şi noduri de curent, ventre de tensiune şi ventre de curent.

La apariţia undei electromagnetice staţionare n-are loc transmiterea energiei electromagnetice de la sursă la receptor, dar pe segmentul liniei, egal cu un sfert din lungimea undei electromagnetice, se acumulează energia electromagnetică $W = W^{(e)} + W^{(m)}$ determinată de parametrii $L_0$ şi $C_0$ şi de mărimile tensiunii şi curentului în linie. Această energie înmagazinată pe porţiunea cu $l = \frac{\lambda}{4}$ trece dintr-o formă în alta, adică din energia câmpului electric în energia câmpului magnetic şi invers. Astfel, pe această porţiune au loc oscilaţii

cu o frecvenţă determinată de parametrii $L_0$ şi $C_0$, adică $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$. În momentul de timp, când curentul în linie este egal cu zero, iar tensiunea atinge valoarea maximală, energia undei electromagnetice trece complet în energia câmpului electric.

În momentul de timp, când tensiunea în linie este egală cu zero, iar curentul atinge valoarea maximală, energia undei electromagnetice trece complet în energia câmpului magnetic.

a) La mers în gol al liniei, când $\underline{Z}_2 = \infty$ şi $\underline{I}_2 = 0$, avem:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_{20} \cos \beta Y \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_{20}}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta Y \end{aligned}\right\}. \qquad (8.48)$$

Trecând la valori momentane, avem:

$$u = \sqrt{2} U_2 \cos \beta Y \sin \omega t, \qquad (8.49)$$

$$i = \frac{\sqrt{2} U_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta Y \sin \left(\beta Y + 90^0\right). \qquad (8.50)$$

Expresiile (8.49) şi (8.50) determină unda electromagnetică staţionară, deoarece tensiunea şi curentul sunt defazate în spaţiu cu $\frac{\lambda}{4}$ şi în timp cu $90^0$.

În punctele $\beta Y = k\pi$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$ vor fi nodurile curentului şi ventrele tensiunii. Graficul undelor electromagnetice ale tensiunii şi curentului este prezentat în fig. 8.7 pentru momentele de timp: $\omega t_1 = 0$; $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$; $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$.

b) La regimul scurtcircuit al liniei ,când $\underline{Z}_2 = 0$ şi $\underline{U}_2 = 0$, avem :

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= j\underline{I}_{2sc}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sin\beta Y \\ \underline{I} &= \underline{I}_{2sc}\cos\beta Y \end{aligned}\right\}. \qquad (8.51)$$

Trecând la valori momentane, avem:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt{2}I_2\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sin\beta Y\sin\left(\omega t + 90^0\right), V \\ i &= \sqrt{2}I_2\cos\beta Y\sin\omega t; A \end{aligned}\right\}. \qquad (8.52)$$

Aplicând formulele (8.52) se poate de construit graficul $u(\beta Y)$ şi $i(\beta Y)$ ce în total reprezintă calitativ graficele din fig. 8.7.

c)În cazul unei sarcini reactive a liniei, când $\underline{Z}_2 = jX$ ,avem:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2\left(\cos\beta Y + \dfrac{\underline{Z}_c}{X_r}\sin\beta Y\right) = \underline{U}_2\dfrac{\sin(\beta Y+\theta)}{\sin\theta}, \\ \underline{I} = \underline{I}_2\dfrac{\cos(\beta Y+\theta)}{\cos\theta}; \; undetg\theta = \dfrac{\underline{Z}_c}{X_r}. \end{cases}$$

a) - graficul tensiunii pentru $\omega t_1 = 0$; $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$; $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$.

b) - graficul curentului pentru $\omega t_1 = 0$; $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$; $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$.

Prin urmare, în toate trei cazuri examinate de funcţionare a liniei fără pierderi, în linie se produc unde staţionare. Ventrele de tensiune şi de curent, cum şi nodurile de tensiune şi de curent sunt, în acest caz, decalate între ele cu un sfert de lungime de undă. Tensiunea şi curentul în fiecare punct al liniei sunt defazate cu un sfert de perioadă şi tensiunea atinge valoarea maximă când curentul în întraga linie este nul, iar curentul atinge valoarea maximă când tensiunea în întrăga linie este egală cu zero.

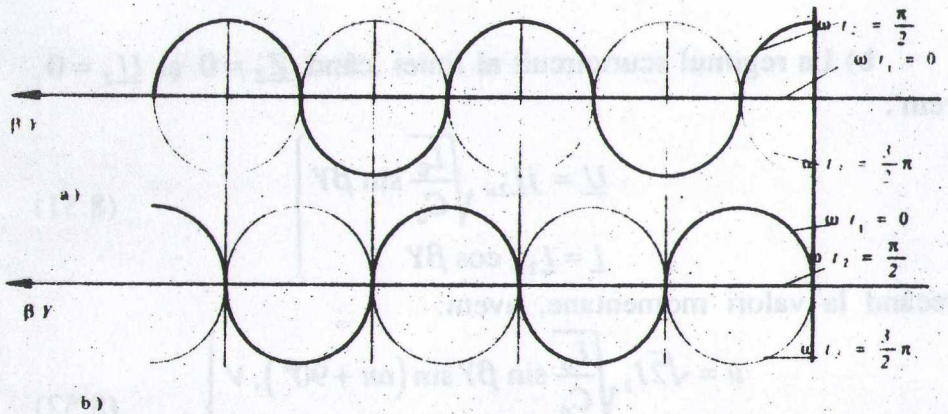


Fig. 8.7.

Deoarece, în acest moment în nodurile de tensiune $u=0$ şi în nodurle de curent $i=0$, în aceste puncte ale liniei puterea este totdeauna nulă şi energia nu se transmite prin aceste puncte. Pe fiecare porţiune de linie, limitată de nodurile de tensiune şi de curent se transmite însă de-a lungul liniei energia legată de oscilaţiile energiei între câmpurile magnetice şi electrice din această porţiune.

Toate trei cazuri examinate de formare a undelor staţionare în linie, sunt caracterizate prin lipsa consumului de energie atât în linie, cît şi în receptor. Când există însă consum de energie în linie sau în receptor, în linie trebuie să existe, inevitabil, unde progresive de tensiune şi de curent ( are loc suprapunerea undei incidente şi undei reflectate), procesul de transmitere a energiei de-a lungul întregii linii putând fi legat numai de aceste unde.

**Concluzii:**

1) În cazul când $\underline{Z}_2 = jX_r$ se obţin unde staţionare, iar la sfârşitul liniei nu vor mai fi nici ventre, nici noduri. Pentru impedanţa de intrare a liniei închise pe o reactanţă, avem:

$$\underline{Z}_r = jz\,tg(\beta l+\theta) = jX_r,$$

adică, dependenţa impedanţei de intrare a liniei de lungimea sa are acelaşi caracter ca şi în cazurile mers în gol şi

scurtcircuit, iar pentru $l = \frac{\lambda}{4}$ şi $l = \frac{\lambda}{2}$ găsim, respectiv, $\underline{Z}_Y = -\frac{z^2}{jX_r}$ şi $\underline{Z}_Y = jx_r$. Penru $X_r = r\,ctg\beta l$ când $\theta = \pm\frac{\pi}{4} - \beta l$, $Z_Y = \pm\infty$ şi atunci linia este echivalentă cu o linie scurtcircuitată, a cărei lungime este egală cu o linie deschisă, a cărei lungime este egală cu un sfert de lungime de undă.

2) În funcţie de frecvenţa tesiunii aplicate, de lungimea liniei şi de impedanţa terminală, linia fără pierderi, închisă pe o reactanţă, reprezintă o reactanţă inductivă sau capacitivă, inductanţa sau capacitatea echivalentă putând avea toate valorile cuprinse între zero şi infinit. Posibilitatea de a realiza cu ajutorul unei linii corespunzătoare alese o reactanţă inductivă sau capacitivă de o valoare sau alta, are la frecvenţele înalte - o impedanţă practică mare.

### 8.13. Determinarea parametrilor primari ai liniei din regimurile mers în gol şi scurtcircuit

Impedanţa complexă a liniei cu pierderi se determină prin expresia:

$$\underline{Z}_{intr} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c th\gamma l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 th\gamma l}. \qquad (8.53)$$

Aplicând regimurile mers în gol şi scurtcircuit faţă de(8.53):

a) din regimul mers în gol, când $\underline{Z}_2 = \infty$, avem:

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_c cth\gamma l. \qquad (8.54)$$

b) din regimul scurtcircuit, când $\underline{Z}_2 = 0$, avem:

$$\underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_c th\gamma l. \qquad (8.55)$$

Impedanţele $\underline{Z}_{10}$ şi $\underline{Z}_{1sc}$ mărimi complexe pot fi determinate din rezultatele experimentale efectuate prin aplicarea voltmetrului, ampermetrului şi fazometrului, de oarece $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{10}e^{j\varphi_{10}}$ şi $\underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_{1sc}e^{j\varphi_{1sc}}$.

Înmulțind (8.54) și (8.55) între ele părțile din stânga și părțile din dreapta, obținem:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1sc}} = \underline{Z}_c e^{j\varphi_c}. \qquad (8.56)$$

Împărțind (8.55) la (8.54) respectiv părțile din stânga dintre ele și părțile din dreapta dintre ele, obținem:

$$th\gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}}} = Te^{j\tau}, \qquad (8.57)$$

sau

$$\alpha l + j\beta l = \frac{1}{2}\ln\frac{1+Te^{j\tau}}{1-Te^{j\tau}} = \frac{1}{2}\ln We^{j\zeta}, \qquad (8.58)$$

de unde $\alpha l = \frac{1}{2}\ln W$; $\beta l = \frac{1}{2}(\zeta + 2k\pi)$, unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

La determinarea defazajului dintre $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2$ se obțin

două valori pentru $\beta l$, ce se deosebește cu $\pi$.

La calculul coeficientului $\beta$ pe cale experimentală e necesar de știut care-i coeficientul "$k$".

Prin parametrii secundari ai liniei $\underline{Z}_c$ și $\gamma = \alpha + j\beta$ se determină parametrii $R_0, \omega L_0, G_0, \omega C_0$ din expresiile:

$$R_0 = Z_c(\alpha\cos\varphi_c - \beta\sin\varphi_c);$$

$$\omega L_0 = Z_c(\beta\cos\varphi_c + \alpha\sin\varphi_c);$$

$$G_0 = \frac{\alpha\cos\varphi_c + \beta\sin\varphi_c}{Z_c};$$

$$\omega C_0 = \frac{\beta\cos\varphi_c - \alpha\sin\varphi_c}{Z_c};$$

## 8.14. Analogia dintre ecuaţiile liniei cu parametrii distribuiţi şi ecuaţiile cuadripolului pasiv

Tensiunea şi curentul ($\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$) de la intrare în linie sunt legate cu ($\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$) de la ieşire din linie prin ecuaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 ch\gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c sh\gamma \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma + \underline{I}_2 ch\gamma l \end{aligned}\right\}. \qquad (8.59)$$

Pentru un cuadripol, avem:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (8.60)$$

Din analogia ecuaţiilor liniei (8.59), avem:

$$A = D = ch\gamma l; \qquad B = \underline{Z}_c sh\gamma l; \qquad C = \frac{sh\gamma l}{\underline{Z}_c}.$$

Deci cuadripolul este echivalent liniei cu parametrii distribuiţi, ce reiese din legătura dintre tensiunile şi curenţii de la intrare şi de la ieşire.

## 8.15. Substituirea cuadripolului prin linia echivalentă lui şi invers

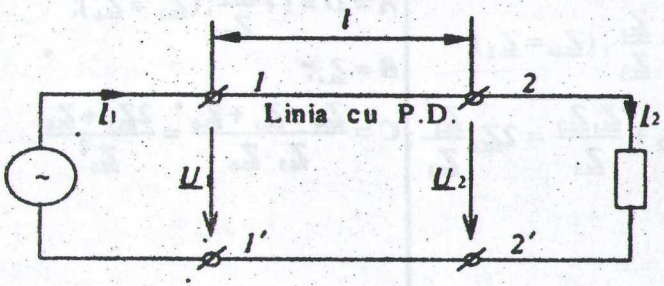



Fig. 8.8

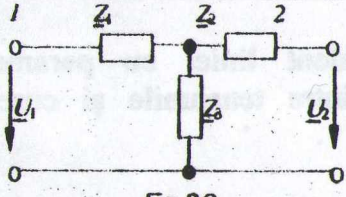
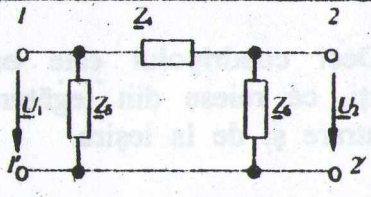
Fie, că ne este dată o linie cu parametri distribuiţi prezentată în fig. 8.8.

Curenţii şi tensiunile nu se schimbă pentru linie independent de modul unde este conectată sursa de energie sau sarcina, adică se admite înlocuirea sursei de energie cu sarcina, deoarece linia cu parametrii distribuiţi posedă proprietatea de simetrie.

E ştiut că cuadripolul simetric posedă aceleaşi proprietăţi. Deci linia omogenă cu parametrii distribuiţi poate fi înlocuită printr-un cuadripol simetric şi invers. Această înlocuire constă în determinarea coeficienţilor $A$, $B$, $C$, $D$ ai cuadripolului prin parametri secundari $\underline{Z}_c$ şi $\gamma$ ai liniei şi invers.

Plecând de la ecuaţiile cuadripolului avem două scheme echivalente: schema în "$T$" şi schema în "$\Pi$" pentru care avem respectiv expresiile prezentate în tab 8.1.

Tabelul 8.1

| Schema în "$T$" | Schema în "$\Pi$" |
|---|---|
|  Fig. 8.9 |  Fig. 8.10 |
| $A = D = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$; $(\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2)$; | $A = D = 1 + \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5}$; $(\underline{Z}_5 = \underline{Z}_6)$; |
| $B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = 2\underline{Z}_1 \frac{\underline{Z}_1^2}{\underline{Z}_3}$; | $B = \underline{Z}_4$; |
| $C = \frac{1}{\underline{Z}_3}$. | $C = \frac{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5 \cdot \underline{Z}_6} = \frac{2\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6}{\underline{Z}_5^2}$. |

a) Substituirea echivalentă a cuadripolului prin linia lungă.

În acest caz se consideră cunoscute impedanțele $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ pentru schema "*T*" și impedanțele $\underline{Z}_4, \underline{Z}_5, \underline{Z}_6$ pentru schema "*Π*" și se determină parametrii secundari ai liniei.

Prealabil se determină coeficienții *A*, *B*, *C*, *D* ai cuadripolului prin formulele respective pentru schema "*T*" și schema "*Π*". Apoi se determină parametrii secundari ai liniei $\underline{Z}_c$ și $\gamma$ din expresiile:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}}; \; th\gamma l = \frac{B}{A \cdot \underline{Z}_c}, \quad \text{unde } th\gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1};$$

sau $$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} = \frac{1 + th\gamma l}{1 - th\gamma} = Me^{j\zeta},$$

de unde $e^{2\alpha l} = M; \; \alpha l = \frac{1}{2} \ln M; \; 2\beta l = \zeta; \; \beta l = \frac{\zeta}{2}$.

La substituirea inversă a liniei prin cuadripolul echivalent ei trebuie de determinat impedanțele $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ pentru schema "*T*" și impedanțele $\underline{Z}_4, \underline{Z}_5, \underline{Z}_6$. pentru schema "*Π*" prin parametrii secundari $\underline{Z}_c$ și $\gamma$ ai liniei. În acest caz prealabil se determină coeficienții *A*, *B*, *C*, *D*, apoi se calculează impedanțele respective aplicând expresiile ce există dintre impedanțele și coeficienții cuadripolului "*T*" sau "*Π*".

### 8.16. Circuit în scară

Se întâlnește câte odată în practică montaj constituit din câteva cuadripoluri simetrice identice conectate în cascad (fig. 8.11). O astfel de schemă se numește schemă în scară. La studiul distribuției curentului și tensiunii de-a lungul schemei în scară este comod de aplicat teoria liniilor cu parametrii distribuiți. În punctul precedent s-a descris cazul substituirii cuadripolului pasiv printr-un tronson de linie echivalentă lui și invers. Dacă numărul de cuadripoluri, ce fac parte din montajul circuitului în scară, este egal cu "*n*", atunci

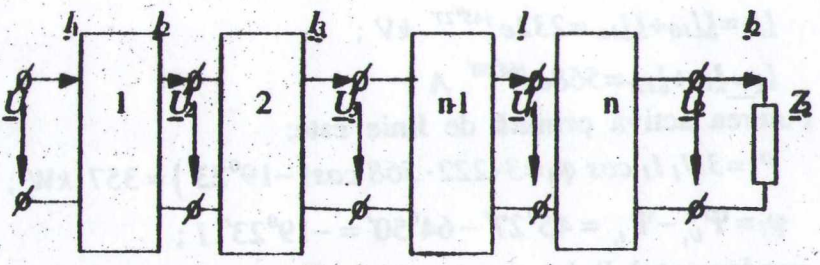



Fig 8.11.

lungimea tronsonului liniei cu parametrii distribuiţi este de "*n*" ori mai mare, adică este egal cu $n \cdot l$.

Notăm tensiunea şi curentul de la ieşire din cuadripolul "*n*" prin $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$ respectiv. Atunci tensiunea şi curentul de la cuadripol sunt:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch\gamma nl + \underline{I}_2 \underline{Z}_c sh\gamma nl ; \qquad (8.61)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma nl + \underline{I}_2 ch\gamma nl . \qquad (8.62)$$

Examinăm câteva exemple numerice ce se raportă la capitolul 8.1 - 8.13.

**Exemplul 1**

O linie electrică trifazată folosită pentru transportul energiei electromagnetice are următorii parametri lineici calculaţi la proiectare:

$$R_0 = 0{,}085\left[\frac{\Omega}{km}\right]; \qquad L_0 = 1{,}415 \cdot 10^{-3}\left[\frac{H}{km}\right];$$

$$C_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-9}\left[\frac{F}{km}\right]; \qquad G_0 = 3{,}97 \cdot 10^{-8}\left[\frac{S}{km}\right].$$

Linia electrică lungă cu $l = 850\ km$ transmite o putere nominală $S_2 = 300\ MVA$ cu $\cos\varphi_2 = 1{,}0$ la tensiunea nominală de linie $U_{2l} = 400\ kV$ şi frecvenţa nominală $f = 50\ Hz$.

Să se calculeze:

1. parametrii lineici secundari ai liniei: impedanţa complexă caracteristică $\underline{Z}_c$, constanta de propagare $\gamma$, coeficientul de atenuare $\alpha$ şi coeficientul de fază $\beta$;

2. tensiunile şi curenţii de la bornele de la început ale liniei pentru funcţionarea în gol şi apoi în scurtcircuit la bornele de sfârşit ale liniei cu tensiunea nominală, respectiv curentul nominal la bornele secundare;

3. regimul de funcţionare la bornele primare ale liniei, dacă regimul de la bornele secundare, de sfârşit este cel nominal.

Rezolvare:

1. Pentru calculul parametrilor lineici secundari unde sunt cunoscuţi parametrii lineici primari este convenabilă determinarea prealabilă a modulului şi argumentului impedanţei complexe $\underline{Z}_0$ "longitudinale", respectiv admitanţei complexe $\underline{Y}_0$ "transversale":

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 0{,}085 + j0{,}446 = 0{,}453\, e^{j79^0 13'} \ \frac{\Omega}{km}$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = 0{,}0397 \cdot 10^{-6} + j2{,}86 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 2{,}86 \cdot 10^{-6} e^{j89^0 13'} \ \frac{S}{km}$$

Cu acestea rezultă:

impedanţa caracteristică

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{0{,}453 e^{-j10^0 47'}}{2{,}86 \cdot 10^{-6} e^{j89^0 13'}}} = 398 \cdot e^{-j5^0} \ \Omega$$

constanta de propagare

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = 1{,}113 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j89^0 13'} = 0{,}115 \cdot 10^{-3} \ ,$$

de unde coeficientul de atenuare $\alpha = 0{,}115 \cdot 10^{-3} \ \frac{Np}{km}$;

coeficientul de fază $\beta = 1{,}113 \cdot 10^{-3} \ \frac{rad}{km}$.

2. Pentru calculul tensiunii şi curentului de la bornele primare cu bornele secundare în gol ($Z_2=\infty$; $I_2=0$),

$$\underline{U}_{10}=\underline{U}_2\, ch\,\gamma l\ , \qquad \text{şi} \qquad \underline{I}_{10}=\frac{U_2}{Z_c}\, sh\,\gamma l\ ;$$

respectiv cu bornele secundare în scurtcircuit ($Z_2=0$; $U_2=0$),

$$\underline{U}_{1sc}=\underline{Z}_c\,\underline{I}_2\, sh\,\gamma l\ , \quad \text{şi} \quad \underline{I}_{1sc}=\underline{I}_2\, ch\,\gamma l\ ;$$

trebuie calculate mai întâi funcţiile hiperbolice $ch\,\gamma l$ şi $sh\,\gamma l$ de argument complex :

$$\gamma l=(0{,}115\cdot 10^{-3}+j1{,}13\cdot 10^{-3})\cdot 850=0{,}09785+j0{,}96,$$

$$e^{\gamma l}=e^{(\alpha l+j\beta l)}=e^{\alpha l}\cdot e^{j\beta l}=e^{0.09775}\cdot e^{j0.96}=e^{0.09775}\cdot e^{j55^0},$$

$$sh\,\gamma l=\frac{1}{2}(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{0.098}\cdot e^{j53^0}-e^{-0.098}\cdot e^{-j53^0}\right)\cong 0{,}823e^{j86^0},$$

$$ch\,\gamma l=\frac{1}{2}(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})\cong 0{,}581e^{j8^05'}.$$

Cu valorile nominale ale tensiunii şi curentului de la bornele secundare

$$\underline{U}_2=\frac{4000}{\sqrt{3}}=232\ kV\ ,$$

şi

$$\underline{I}_2=\frac{S_2}{3U_2}=\frac{300\cdot 10^3}{3\cdot 232}=432\ A.$$

Se obţin:

$$\underline{U}_{10}=U_2\, ch\,\gamma l=232\cdot 0{,}581\cdot e^{j8^05'}\cong 135e^{j8^05'}\ kV\ ;$$

$$\underline{I}_{10}=\frac{U_2}{Z_c}\, sh\,\gamma l=\frac{232\cdot 10^3}{398\cdot e^{-j5^0}}\cdot 0{,}823e^{j86^0}\cong 480e^{j91^0}\ A\ ;$$

$$\underline{U}_{1sc}=\underline{Z}_c\,\underline{I}_2\, sh\,\gamma l\cong 142e^{j81^0}\ kV;\ \underline{I}_{1sc}=\underline{I}_2\, ch\,\gamma l\cong 251e^{j8^0}\ A.$$

3. Tensiunea şi curentul de la bornele primare ale liniei rezultă prin însumarea componentelor de la funcţionarea în gol şi scurtcircuit calculate anterior:

$\underline{U}_1=\underline{U}_{10}+\underline{U}_{1sc}=232e^{j45^0 27'}\ kV$ ;

$\underline{I}_1=\underline{I}_{10}+\underline{I}_{1sc}=568e^{j64^0 50'}\ A$ .

Puterea activă primită de linie este:

$P_1=3U_1 I_1 \cos\varphi_1=3\cdot 222\cdot 568\cos\left(-19^0 23'\right)=357\ kW$ ;

$\varphi_1=\Psi_{U_1}-\Psi_{I_1}=45^0 27'-64^0 50'=-19^0 23'.1$ ;

şi deci randamentul liniei este:

$$\eta=\frac{P_2}{P_1}=\frac{300}{357}=0,84.$$

Linia generează puterea reactivă la bornele primare

$Q_1=3U_1 I_1 \sin\varphi_1=3\cdot 222\cdot 568\cdot \sin(-19^0 23')=-126\ MVAr.$

**Exemplul 2**

O linie electrică trifazată lungă cu $l=900\ km$ la tensiunea nominală de linie $U_{2l}=400\ kV$ şi frecvenţa nominală $f=50\ Hz$ cu pierderile de putere prin scurgere şi prin efect corona la o unitate de lungime $P_0=4,64\ \frac{W}{km}$ şi parametrii primari $R_0=0,08\ \frac{\Omega}{km}$ cu $L_0=0,42\frac{\Omega}{km}$, $l_0=\omega C_0=2,7\ 10^{-6}\ \frac{s}{km}$ este conectată la o sarcină activă $Z_2=r=397\ \Omega$ egală cu impedanţa caracteristică $\underline{Z}_c=\underline{Z}_2=r$.

Să se determine: $\underline{U}_1, \underline{I}_1, P_2, P_1, \eta, \lambda, \gamma, \vartheta, Z_c$.

**Rezolvare:**

Constanta de propagare: $\gamma=\sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0}=\alpha+j\beta$,

unde: $\underline{Z}_0=R_0+j\omega L_0=0,08+j0,42=0,427e^{j79^0 13}\ \frac{\Omega}{km}$,

$\underline{Y}_0=G_0+j\omega C_0=0,87\cdot 10^{-7}+j2,7\cdot 10^{-6}=2,7\cdot 10^{-6}e^{j88^0 10'}\ \frac{s}{km}$,

unde: $G_0 = \frac{P_0}{U^2 f} = \frac{4,64}{\left(\frac{400 \cdot 10^3}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0,87 \cdot 10^{-7} \quad \frac{s}{km}$.

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta = \sqrt{0,427 e^{j79^0 13'} \cdot 2,7 \cdot 10^{-6} e^{j88^0 10'}} =$$

$$= 1,075 \cdot 10^{-3} e^{j84^0 36'} = 0,1007 \cdot 10^{-3} + j1,068 \cdot 10^{-3} \frac{1}{km}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,1007 \cdot 10^{-3} + j1,068 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha = 0,1007 \cdot 10^{-3}, \frac{Np}{km}; \beta = 1,068 \cdot 10^{-3} \quad \frac{rad}{km}.$$

**Impedanţa caracteristică:** $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = 397 e^{-j5} \ \Omega$;

**Lungimea undei electromagnetice:**

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2 \cdot 3,14}{1,068 \cdot 10^{-3}} = 5880 \ km;$$

**Viteza propagări undei:**

$$\vartheta = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = 5880 \cdot 50 = 2,94 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s};$$

**Tensiunea de la intrare în linie:**

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch\gamma l + \underline{I}_2 Z_c sh\gamma l = \underline{U}_2 \left( ch\gamma l + \frac{\underline{Z}_c}{Z_2} sh\gamma l \right) =$$

$$= 231 \left( 0,66 e^{j5^0 30} + e^{-j5^0 23} \cdot 0,76 e^{j86^0} \right) = 248 e^{j46},$$

$$\underline{U}_1 = 248 e^{j46}, kV.$$

unde: $ch\gamma l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = 0,66 e^{j5^0 30'}$;

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} sh\gamma l + \underline{I}_2 ch\gamma l = 578 e^{j52^0} \ A;$$

$$\underline{I}_1 = 578 e^{j52^0} \ A.$$

Puterile:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 248 \cdot 578 \cos(-5) = 142,56 MW;$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 = 231 \cdot 582 \cos 0^0 = 134 \ MW;$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{231 \cdot 10^3}{397} = 582 \ A.$$

Randamentul: $$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{134}{142,56} = 0,94.$$

**Exemplul 3**

O linie electrică trifazată lungă cu $l = 400 \ km$ și cu parametrii secundari: $f = 500 \ Hz$,

$$\gamma = 3,76 \cdot 10^{-3} + j11,3 \cdot 10^{-3} \ \frac{1}{km}; \ \underline{Z}_c = 752 - j202 \ \Omega.$$

De asemenea, sunt cunoscute constantele de integrare:

$$\underline{A}_1 = 296 e^{j121^0}, V \ \underline{A}_2 = 158 e^{-j121^0} \ V$$

Să se calculeze:

1. Parametrii primari ai liniei: $R_0$, $L_0$, $G_0$, $C_0$.
2. Aplicând rezultatele obținute în punctul 1 să se calculeze valoarea $R_0$ pentru care linia devine linie fără distorsiuni.
3. Linia este conectată la sarcina $\underline{Z}_2$. Să se determine impendanța sarcinii $\underline{Z}_2$, dacă: $\underline{A}_1 = 296 e^{j121^0}, V \underline{A}_2 = 158 e^{-j121^0}, V$. De asemanea, să se determine expresia tensiunii $U_a(t)$ valoarea momentană în punctul "$a$" situat la mijlocul liniei ($l/2$).

Rezolvare:

1. Parametrii primari ai liniei:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_c e^{j\varphi_c} \ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = Me^{j\varphi_M}$$

$$\gamma \cdot \underline{Z}_c = R_0 + j\omega L_0 = (3{,}76 \cdot 10^{-3} + j11{,}3 \cdot 10^{-3})(752 - j202) =$$

$$= 5 + j7{,}79 = 9{,}27 e^{j57^0 22'} \quad \frac{\Omega}{m}$$

de unde:

$$R_0 = 5, \frac{\Omega}{m}; \omega L_0 = 7{,}79, \frac{\Omega}{m}; L_0 = \frac{7{,}79}{3140} = 2{,}48 \cdot 10^{-3} \quad \frac{H}{m};$$

$$\frac{\gamma}{\underline{Z}_c} = G_0 + j\omega C_0 = 15{,}25 \cdot 10^{-6} e^{j87^0 22'} = 0{,}755 \cdot 10^{-6} + j15{,}2 \cdot 10^{-6} \quad \frac{s}{km}.$$

de unde: $G_0 = 0{,}755 \cdot 10^{-6}, \frac{S}{km}$; $\omega C_0 = 15{,}2 \cdot 10^{-6} \quad \frac{S}{km}$;

$$C_0 = \frac{\omega C_0}{\omega} = \frac{15{,}2 \cdot 10^{-6}}{3140} = 4{,}84 \cdot 10^{-9} \quad \frac{F}{km};$$

$$\omega = 2\pi f = 3140 \ s^{-1}.$$

2. Valoarea $R_0'$ pentru care linia devine linie fără distorsiuni.

Pentru linia fără distorsiuni trebuie să se respecte relaţia dintre parametrii primari:

$$\frac{R_0'}{L_0} = \frac{G_0}{C_0},$$

de unde :

$$R_0' = \frac{L_0 G_0}{C_0} = 0{,}388 \quad \frac{\Omega}{km}.$$

3. Determinăm $\underline{Z}_2$ şi $U_a(t)$.

La determinarea impedanţei complexe $\underline{Z}_2$ a sarcinii aplicăm expresiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_1 e^{\gamma l} + \underline{A}_2 e^{-\gamma l}, \\ \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma l} - \dfrac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma l}, \end{cases}$$

unde: $l = 400 \ km$,

$$\underline{A}_1 = 296e^{j14^0}, V\ \underline{A}_2 = 158e^{-j121^0}\ V;$$

$$\gamma = 3,76 \cdot 10^{-3} + j11,3 \cdot 10^{-3}, \frac{1}{km}.$$

de unde: $$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c \frac{\underline{A}_1 e^{\gamma l} + \underline{A}_2 e^{-\gamma l}}{\underline{A}_2 e^{-\gamma l} - \underline{A}_1 e^{\gamma l}}.$$

Tensiunea $U_a(t)$ la mijlocul liniei:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_1 ch\gamma\frac{l}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_c sh\gamma\frac{l}{2}.$$

unde:

$$ch\gamma\frac{l}{2} = \frac{e^{\gamma\frac{l}{2}} + e^{-\gamma\frac{l}{2}}}{2} = 0,993e^{j139^0 20'};\ sh\gamma\frac{l}{2} = \frac{e^{\gamma\frac{l}{2}} - e^{-\gamma\frac{l}{2}}}{2} = 1,13e^{j115^0 30'};$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = 155e^{j239^0}\ V;$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{A}_2 - \underline{A}_1}{\underline{Z}_c} = 160e^{j239^0}\ A.$$

Deci:

$$\underline{U}_a = 155e^{j239^0} \cdot 0,993e^{j139^0 20'} - 160e^{j239^0} \cdot 1,13e^{j115^0 30} =$$

$$= 146 + j49,9 - 181 + j4,71 = -35 + j54,06 = 64e^{j123^0}\ V;$$

$$\underline{U}_a = 64e^{j123^0}, V \quad U_a = \sqrt{2} \cdot 64 \sin\left(\omega t + 123^0\right) V.$$

**Exemplul 4**

O linie electrică trifazată lungă cu $l$ = 900 *km*, construită pentru transmiterea puterii nominale $S_2$ = 300 *MVA*, la tensiunea nominală de linie $U_{2l}$ = 400 *kV* şi frecvenţa nominală $f$ = 50 *Hz*, este încercată la punerea în funcţiune, în gol şi apoi în scurtcircuit. La funcţionarea în gol pentru tensiune nominală la bornele secundare s-a măsurat tensiunea de linie primară $U_{10l}$ = 234 *kV*, curentul primar $I_{10}$ = 480 *A* şi puterile primare, cu metoda celor două watmetre, obţinându-se indicaţiile $P'_{10}$ = -55 *W*; $P''_{10}$ = 84,6 *W*.

La funcţionarea în scurtcircuit:

$U_{1scl}$ = 246 *kV*; $I_{1sc}$ = 251 *A*; $P'_{1sc}$ = 19,7 *W*; $P''_{1sc}$ = -64 *W*.

Să se calculeze:

1. Impedanţele de intrare la bornele primare ale liniei pentru încercarea în gol şi în scurtcircuit.
2. Parametrii lineici secundari ai liniei.
3. Parametrii lineici primari ai liniei.

Rezolvare:

1. Impedanţa de intrare în gol şi în scurtcircuit.

Modulul inpendanţelor pentru funcţionarea în gol:

$$Z_{10} = \frac{U_{10l}}{\sqrt{3} I_{10}} = 281\ \Omega ,$$

în scurtcircuit:

$$Z_{1sc} = \frac{U_{1scl}}{\sqrt{3} I_{1sc}} = 566\ \Omega .$$

Argumentul impedanţelor complexe se obţine cu ajutorul raportului indicaţiilor celor două watmetre:

$$\varphi_1 = \arg \sqrt{3}\, \frac{P_1 - P_1''}{P_1' + P_1''} .$$

Rezultă: $\varphi_{10} = arctg\,(-8,144) = -83^0 .$

pentru încercarea de mers în gol, iar pentru încercarea la scurtcircuit: $\varphi_{1sc} = arctg\, 3,27 = 73^0 .$

Impendanţele complexe de intrare sunt deci:

$$\underline{Z}_{10} = 281 e^{-j83^0}\ \Omega ; \underline{Z}_{1sc} = 566 e^{j73^0}\ \Omega .$$

2. Parametrii secundari ai linfei.

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{10} \cdot \underline{Z}_{1sc}} = 398 e^{-j5^0}\ \Omega \qquad e^{2\gamma l} = \frac{1 + th\,\gamma l}{1 - th\,\gamma l} = M\, e^{j\varphi_m} ,$$

$$th\,\gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}}} = 1,42 e^{j78^0} , \qquad e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} = M\, e^{j\varphi_m} .$$

de unde:
$$\left.\begin{aligned} e^{2\alpha l} &= M \\ e^{j2\beta l} &= e^{j\varphi_m} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\ln M \\ \beta &= \frac{\varphi_m}{2l} \end{aligned}$$

Deci avem:

$$\alpha = 0{,}107 \cdot 10^{-3}, \frac{Np}{km}$$

$$\beta = 1{,}06 \cdot 10^{-3}, \frac{rad}{km}$$

$$\underline{Z}_c = 389 e^{-j5^0}, \Omega; \gamma = \alpha + j\beta = 0{,}107 \cdot 10^{-3} + j1{,}06 \cdot 10^{-3}, \frac{1}{km}$$

3. Parametrii primari ai liniei:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}; \gamma = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0};$$

unde: $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0; \quad \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0;$

$$\underline{Z}_c \gamma = \underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = 0{,}08 + j0{,}042, \frac{\Omega}{km},$$

de unde: $R_0 = 0{,}08, \frac{\Omega}{km}; \omega l_0 = 0{,}042, \frac{\Omega}{km};$

$$\frac{\gamma}{\underline{Z}_c} = \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = 0{,}013 \cdot 10^{-6} + j2{,}7 \cdot 10^{-6}, \frac{s}{km}.$$

de unde: $G_0 = 0{,}013 \cdot 10^{-6}, \frac{s}{km}; \omega C_0 = 2{,}7 \cdot 10^{-6}, \frac{s.}{km}$

Luând în considerație că $\omega = 2\pi f = 314 s^{-1}$, avem:

$$R_0 = 0{,}08, \frac{\Omega}{km}; L_0 = 1{,}34 \cdot 10^{-3}, \frac{H}{km};$$

$$G_0 = 0{,}013 \cdot 10^{-6}; \frac{s}{km}; C_0 = 8{,}6 \cdot 10^{-9}, \frac{F}{km}.$$

**Exemplul 5**

Se dau: $\underline{Z}_{1sc} = 900e^{j63^0}\ \Omega$; $\underline{Z}_{10} = 360e^{-j78^0}\ \Omega$; $l = 59\ km$; $f = 800\ Hz$.

Să se determine: $R_0$, $L_0$, $C_0$, $G_0$.

Rezolvare:

Parametrii secundari ai liniei:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{1sc} \cdot \underline{Z}_{10}} = 570e^{-j7^0 30}\ \Omega;$$

$$th\gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1sc}}{\underline{Z}_{10}}} = 1,58e^{j70^0 30},$$

$$e^{2\gamma l} = \frac{1+th\gamma l}{1-th\gamma l} = \frac{1+1,58e^{j78^0 30}}{1-1,58e^{j78^0 30}} = 1,43e^{j116^0},$$

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l}.,$$

sau $e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} = 1,43e^{j116^0}$.

de unde: $e^{2\alpha l} = 1,43;\ e^{j2\beta l} = e^{j116^0};\ \ln e^{2\alpha l} = \ln 1,43;\ 2\alpha l = 0,35;$

$$\alpha = 2,97 \cdot 10^{-3}, \frac{Np}{km};\ 2\beta l = 2,01(116^0);\ \beta = 1,71 \cdot 10^{-2}, \frac{rad}{km}.$$

Deci:

$$\underline{Z}_c = 570e^{-j7^0 30}, \Omega\gamma = 0,00297 + j0,017, \frac{1}{km}$$

Parametrii primari:

$$\underline{Z}_c \gamma = R_0 + j\omega L_0 = 2,84 + j3,8,$$

unde: $R_0 = 2,84, \frac{\Omega}{km};\ \omega L_0 = 9,8, \frac{\Omega}{km};\ L_0 = \frac{9,8}{\omega} = \frac{9,8}{6,28 \cdot 800} = 1,94 \cdot 10^{-3}, \frac{H}{km};$

$$\frac{\gamma}{\underline{Z}_c} = G_0 + j\omega C_0 = 0,7 \cdot 10^{-6} + j3,25 \cdot 10^{-6}.$$

unde: $G_0 = 0,7 \cdot 10^{-3}, \frac{S}{km};\ \omega C_0 = 3,25 \cdot 10^{-6}, \frac{S}{km};\ C_0 = \frac{3,25}{\omega} = 6,25 \cdot 10^{-9}, \frac{F}{km}.$

Deci avem: $R_0 = 2,84, \frac{\Omega}{km}; L_0 = 1,94 \cdot 10^{-3}, \frac{H}{km};$

$$G_0 = 0,7 \cdot 10^{-3}, \frac{S}{km}; C_0 = 6,25 \cdot 10^{-9}, \frac{F}{km}.$$

**Exemplul 6**

Linia bifilară fără pierderi are parametrii primari: $L_0 = 3,2 \cdot 10^{-3}, \frac{H}{km}, C_0 = 2 \cdot 10^{-8}, \frac{F}{km}, \omega = 1,57 \cdot 10^4, s^{-1}$. Valoarea momentană a curentului în punctul $Y_a = 4,17\ km$ de la capătul liniei are expresia: $i_a = 0,25 \sin(\omega t - 20^0), A$.

Să se determine expresia valorii momentane a tensiunii în punctul $Y_a$ pentru cazurile:

a) linia în regim de mers în gol;

b) linia în regim de scurtcircuit.

Rezolvare:

Ecuațiile liniei fără pierderi:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 \underline{Z}_c \sin \beta y; \\ \underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta y. \end{cases}$$

unde: $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 400, \Omega; \qquad \gamma = \alpha + j\beta = j\beta; \alpha = 0;$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 1,57 \cdot 10^4 \sqrt{3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 12,56 \cdot 10^{-2}, \frac{rad}{km}.$$

a) regim mers în gol $(Z_2 = \infty, I_2 = 0)$:

$$\underline{I}_a = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \sin \beta Y_a, \quad unde \quad \underline{I}_a = \frac{0,25}{\sqrt{2}} e^{-j20^0}, A$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{I}_a \underline{Z}_c}{j \sin \beta Y_a} = \frac{0.25 e^{-j20^0} 400}{\sqrt{2}\ j0,5} = 141.6 e^{j110^0}\ V$$

$$\sin \beta Y_a = \sin 12,56 \cdot 10^{-2} \cdot 4,17 = \sin 0,524 = \sin 30^0 = 0,5$$

$$\cos \beta Y_a = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) regim scurtcircuit $(Z_2 = 0, U_2 = 0)$

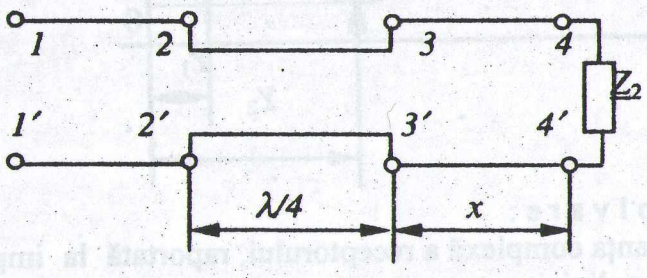
$$\underline{U}_a = j\underline{I}_2 Z_c \sin \beta Y_a, \text{ unde } \underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_a}{\cos \beta Y_a} = 0,24 e^{-j20^0} \ A$$

Deci:

$$\underline{U}_a = j0,24 e^{-j20^0} 400 \sin 30^0 = 48 e^{j70^0};$$

$$u_a = 48\sqrt{2} \sin(\omega t + 70^0) \ V.$$

**Exemplul 7**




Pentru adoptarea unui receptor cu impedanţa $\underline{Z}_2 = 400 + j225\ \Omega$ la linia de alimentare a cărei impendanţă este $Z_c = 300\ \Omega$ se foloseşte o linie sfert de undă ca transformator de adaptare şi o porţiune de linie cu lungimea X, conectată în serie. Să se calculeze fracţiunea $\frac{x}{2}$ minimă necesară pentru porţiunea de linie şi impendanţa caracteristică $Z_{CT}$ a transformatorului de adaptare.

Rezolvare:

Porţiunea de linie fără pierderi cu lungimea $x$ trebuie să aibă impendanţa de intrare $\underline{Z}_3$ rezistivă şi deci se impune condiţia: $\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_c tg\beta x}{j\underline{Z}_2 tg\beta x + \underline{Z}_c} = \frac{R_2 + j(X_2 + Z_c tg\beta x)}{Z_c - X_2 tg\beta x + jR_2 tg\beta x}$.

Idendificarea părţilor reale şi imaginare conduce la sistemul:

$$\frac{R_2}{Z_c - X_2 tg\beta x} = \frac{X_2 + Z_c tg\beta x}{R_2 tg\beta x} = \frac{\underline{Z}_3}{Z_c},$$

sau

$$\frac{\frac{\underline{Z}_3 - R_2}{\underline{Z}_3}}{\frac{Z_c}{Z_c} X_2} = \frac{X_2}{\frac{R_2 \underline{Z}_3}{Z_c} - Z_c} = tg\beta x.$$

se obţin ecuaţiile:

$$\begin{cases} tg^2\beta\alpha + \dfrac{Z_2^2 - Z_c^2}{X_2 Z_c} tg\beta\alpha - 1 = 0; \\ \dfrac{\underline{Z}_3^2}{Z_c^2} - \dfrac{Z_c^2 + Z_2^2}{R_2 Z_c^2} \underline{Z}_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Cu valorile numerice date rezultă soluţiile:

$$tg\beta x_1 = tg2\cdot\pi\frac{x_1}{\lambda} \cong -2,23 \rightarrow \frac{\underline{Z}_3}{Z_c} \cong 0,5;$$

$$tg\beta x_2 = tg2\cdot\pi\frac{x_2}{\lambda} \cong 0,447 \rightarrow \frac{\underline{Z}_3}{Z_c} \cong 2.$$

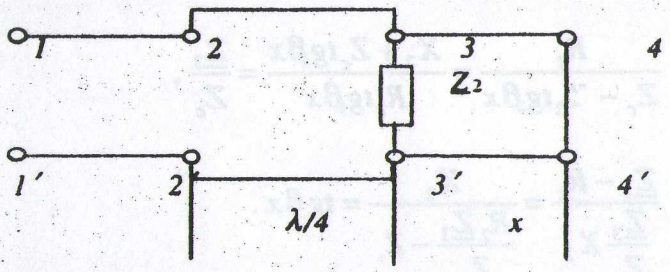
La $\frac{\underline{Z}_3}{Z_c} = 0,5$ corespund:

$$\frac{x_1}{\lambda} = 0,317; Z_3 = 150,\Omega Z_{CT} = \sqrt{Z_3 Z_c} = 212\ \Omega,$$

iar la $\frac{\underline{Z}_3}{Z_c} = 2$ corespund:

$$\frac{x_1}{\lambda} = 0,0865; Z_3 = 600,\Omega Z_{CT} = \sqrt{Z_3 Z_c} = 424\ \Omega.$$

**Exemplul 8**




Pentru adoptarea unui receptor cu impedanţa $\underline{Z}_2 = 400 + j225\ \Omega$ la linia de alimentare cu $Z_c = 300\ \Omega$ se foloseşte o linie sfert de undă ca transformator de adaptare şi o porţiune de linie cu lungimea $X$, conectată în paralel.

Rezolvare:

Admitanţa porţiunii de linie fără pierderi cu lungimea $X$ trebuie să fie pur conductivă, rezolvând ecuaţia:

$G_2 - jB_2 - jY_c ctg\beta x = G_2$ cu soluţia: $x = arcctg(-B_2 Z_c) = 107^0 50'$;

din care se obţine: $\frac{x}{\lambda} = 0,3$.

Linia sfert de undă realizează deci adoptarea rezistenţei de sarcină $\frac{1}{G_2}$ la valorile impedanţei caracteristice a liniei de alimentare.

De aceea, avem: $Z_{CT} = \sqrt{\frac{Z_c}{G_2}} = 397\ \Omega$.

**Exemplul 9**

**O linie electrică de înaltă frecvenţă, cu pierderi neglijabile, are impedanţa caracteristică $Z_c = 400\Omega$. Să se calculeze impedanţa complexă a sarcinii, dacă valoarea efectivă maximă a tensiunii, măsurată la distanţa de $0,1\ m$ de bornele receptorului este de $0,4\ V$, iar valoarea efectivă minimă este de $0,3\ V$ şi este măsurată la distanţa de $0,6\ m$ de bornele receptorului.**

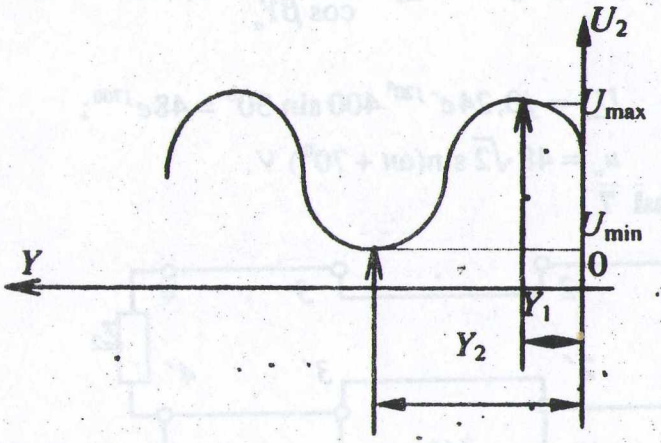
Se dau:

$U_{max} = 0,4V$

$Y_1 = 0,1m$

$U_{min} = 0,3V$ $U_{max}$

$Y_2 = 0,6m$




Rezolvare:

Impedanța complexă a receptorului, raportată la impedanța caracteristică a liniei:

$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{1+\underline{K}}{1-\underline{K}},$$

unde $\underline{K}$ este coieficientul de reflexie, modulul căruia se calculează cu ajutorul raportului valorilor extremale ale tensiunii de-a lungul liniei:

$$|\underline{K}| = \frac{\frac{U_{max}}{U_{min}} - 1}{\frac{U_{max}}{U_{min}} + 1} = \frac{0,33}{2,33} = 1,1416,$$

iar argumentul său se calculează cu ajutorul distanţelor valorilor extreme: $\varphi_K = 4\pi \frac{Y_2}{\lambda} = 4\pi \frac{Y_1}{Y_2 - Y_1} = 0,2\pi$.

Cu aceasta rezultă:

$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} = \frac{1+\underline{K}}{1-\underline{K}} = \frac{1+1,1416e^{j36^0}}{1-1,1416e^{j36^0}};$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c \frac{1+1,1416e^{j36^0}}{1-1,1416e^{j36^0}} = 400;$$

$$\frac{1+1,1416e^{j36^0}}{1-1,1416e^{j36^0}} = 503e^{-j10^0} \ \Omega;$$

$$\underline{Z}_2 = 503e^{-j10^0} \ \Omega.$$

**Exemplul 10**

Pentru linia fără pierderi cu $l = 200, m, L_0 = 2 \cdot 10^{-6}, \frac{H}{m}$, $C_0 = 5,55 \cdot 10^{-12}, \frac{F}{m}$, $\lambda = 60 \ m$ conectată la o sarcină pur inductivă cu $L_0 = 0,01 \cdot 10^{-3} \ H$ să se determine:

1. Parametrii secundari $Z_c, \beta$.

2. Să se demonstreze faptul apariţiei undelor electromagnetice staţionare în linie.

3. Să se determine distanţa cea mai apropiată de la capătul liniei unde vor fi cele mai apropiate ventre ale curentului şi a tensiunii.

4. Să se determine raportul amplitudinilor tensiunilor şi curenţilor în ventru şi de la capătul liniei.

**Rezolvare:**

1. Parametrii secundari ai liniei:

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 600, \Omega; \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0} = j0,105;$$

$$\alpha = 0; \beta = 0,105, \frac{rad}{m}$$

2. Demonstrația apariției undelor electromagnetice staționare.

Ecuațiile liniei fără pierderi în forma complexă:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j\underline{I}_2 Z_c \sin \beta y; \\ \underline{I} = j\dfrac{\underline{U}_2}{Z_c} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y; \end{cases}$$

unde:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2;$$

$$\underline{Z}_2 \; j\omega L = j2 \cdot \pi \; fL = j6,28 \cdot 0,5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-5} = j314 \; \Omega;$$

$$f = \frac{\vartheta}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{60} = 0,5 \cdot 10^7, Hz.$$

sau

$$\underline{U} = \underline{U}_2 (\cos \beta y + j\frac{Z_c}{\underline{Z}_2} \sin \beta y) = \frac{\underline{U}_2}{\cos \delta} \cos (\beta y - \delta);$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 (\cos \beta y + j\frac{Z_c}{\underline{Z}_2} \sin \beta y) = -\frac{\underline{I}_2}{\cos \delta} \sin (\beta y - \delta).$$

unde: $\delta = arctg \dfrac{Z_c}{Z_2} = arctg \dfrac{600}{314} = 63^0 25 = 1,09, rad.$

Trecând la valori momentane, avem:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}U_2}{\cos \delta} \cos (\beta y - \delta) \sin \omega t = U_{2m} \cos (\beta y - \delta) \sin \omega t; \\ i = I_{2m} \sin (\beta y - \delta) \cos \omega t; \end{cases}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{jZ_2} = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} e^{-j90^0} = -j\frac{\underline{U}_2}{Z_2} = -j\underline{I}_2.$$

Analizând expresiile obţinute pentru $u(t)$, $i(t)$ se poate demonstra că în linie apar unde electromagnetice staţionare deoarecare tensiunea şi curentul sunt defazaţi în spaţiu cu $\frac{\lambda}{4}$, iar în timp cu $\frac{\pi}{2}$.

3. Punctele cele mai apropiate pentru ventru tensiunii şi a curentului.

Punctul de ventru pentru tensiune se determină din expresia $\cos(\beta y - \delta) = 1$, adică $\beta y - \delta = 0$ de unde:

$$Y = \frac{\delta}{\beta} = \frac{1,09}{0,1057} = 10,5m.$$

Pentru curent: $Y_2 = Y_1 + \frac{\lambda}{4} = 10,5 + \frac{60}{4} = 25,5m.$

4. Raportul dintre tensiuni şi dintre curenţi în punctul de ventru şi la capătul liniei.

Pentru tensiuni: $\frac{U_2}{\cos\delta} : U_2 = 2,156; \cos 63^0 20 = 0,464,.$

Pentru curenţi:

$$\frac{I_2}{\sin\delta} : I_2 = \frac{1}{\sin\delta} = 1,12; \sin\delta = \sin 63^0 20 = 0,8935.$$

# 9. PROCESE DE TRANZIŢIE ÎN CIRCUITE ELECTRICE CU PARAMETRII DISTRIBUIŢI

## 9.1. Noţiuni generale

În electroenergetică, telefonie, telegrafie, tehnică de calcul, radiotehnică şi tehnică de impulse de o importanţă însemnătate au, de asemenea, procesele de tranziţie în circuitele electrice, ce conţin linii cu parametrii distribuiţi.

În linii lungi asemănator circuitelor electrice cu parametrii concentraţi la comutaţie, adică la conectarea, deconectarea surselor de alimentare şi receptoarelor nu se stabileşte imediat regim staţionar. Regimul staţionar poate, de asemenea, să fie perturbat la ruperea liniei sau la scurtcircuitarea ei - regimuri accidentale.

Procesele de tranziţie în circuite cu parametri distribuiţi ca şi în circuite cu parametrii concentraţi teoretic parcurg într-un timp infinit de lung. Practic durata procesului de tranziţie depinde de mărimea parametrilor liniei ($R_0$, $L_0$, $G_0$, $C_0$) pe o unitate de lungime şi de impedanţele surselor şi receptoarelor. Indiferent de durata procesului de tranziţie acest regim trebuie să fie analizat, de asemenea, şi în utilajele, ce conţin linii lungi. În linia de transport de energie cu tensiune înaltă în decursul procesului de tranziţie pot să apară supratensiuni, supracurenţi, iar în liniile de recepţie - perturbaţia la propagarea normală a sunetelor.

Selectarea incorectă a instalaţiilor la supratensiune poate sa provoace străpungerea izolatorului la descărcare între unele părţi ale instalaţiei; supracurentul - la declanşarea greşită a aparatelor de protecţie, la deteriorarea aparatelor de măsurări electrice, la arderea contactelor.

Procesele de tranziţie sunt observate şi la acţiunile surselor de f.e.m. neperiodice. Astfel de f.e.m. sunt create în aparatele liniilor de recepţie, în telemecanică. F.e.m. neperiodice apar în linii aeriene la descărcări atmosferice, la propagarea informaţiei în linii ce se află în apropierea liniilor de transport de energie în care au loc procese de tranziţie. Analiza proceselor de tranziţie în circuite cu parametri distribuiţi

se efectuează reieşind din ecuaţiile diferenţiale şi aplicarea metodelor cunoscute.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\}. \qquad (9.1)$$

Ecuaţiile (9.1) sunt aplicate la analiza regimului staţionar şi proceselor de tranziţie. Din punct de vedere matematic integrarea ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale reprezintă o problema complicată. De aceea, în cursul BTE procesele de tranziţie se studiază într-o formă mai redusă, adică se studiază procesele de tranziţie în linii omogene fără pierderi ($R_0=G_0=0$). Studierea proceselor de tranziţie în liniile fără pierderi ($R_0=G_0=0$) permite de a studia calitativ trăsăturile de bază a proceselor. Cu atât mai mult că în realitate liniile cu parametri distribuiţi posedă relativ pierderi mici.

### 9.2. Rezolvarea generala a ecuaţiilor liniilor omogene

Pentru a calcula regimurile staţionare în linii lungi trebuie de ştiut:

a) curenţii la intrare şi la ieşirea din linie;
b) tensiunea şi impedanţa receptorului;
c) curentul şi tensiunea la începutul sau la capătul liniei.

În decursul procesului de tranziţie caracterul variaţiei $U$ şi $I$ depinde nu numai de mărimile de la frontieră, dar şi de condiţiile iniţiale, adică de mărimile tensiunilor şi curenţilor în momentul comutaţiei sau de apariţia f.e.m. neperiodice.

Astfel, problema calculului procesului de tranziţie se aportă la rezolvarea generală a ecuaţiilor,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\}, \qquad (9.2)$$

care satisfac mărimilor iniţiale ($t=0$) şi mărimilor de frontieră ($x=0$; $x=l$), de asemenea, mărimilor tensiunilor şi curenţilor în

acele puncte ale liniei unde ele sunt date (sursa de tensiune sau sursa de curent).

Considerăm procesul de tranziție în linia fără pierderi ($R_0=G_0=0$).

Pentru linia fără pierderi ecuațiile (9.2) au următoarea înfățișare:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}; \tag{9.3}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{9.4}$$

Derivăm ecuația (9.3) în raport cu $x$, iar ecuația (9.4) în raport cu $t$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=L_0\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}; \tag{9.5}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=C_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9.6}$$

Înlocuim $\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}$ din ecuația (9.5) prin $-C_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ și notăm:

$$L_0C_0=\frac{1}{V^2}; \qquad V_f=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$$

primim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{9.7}$$

Dacă ecuația (9.3) o derivăm prin $t$, iar (9.4) prin $x$, obținem respectiv:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=\frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{9.8}$$

Ecuațiile (9.7) și (9.8) sunt ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi. Aceste ecuații din punct de vedere matematic prezintă ecuații undulare (telegrafice). Soluția ecuației (9.7) prezintă suma a două funcții $f_1$ și $f_2$. Argumentul funcției $f_1$ este $\left(t-\frac{x}{v}\right)$, iar la funcția $f_2$ - $\left(t+\frac{x}{v}\right)$, adică:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \qquad (9.9)$$

Cu scopul reducerii înscrierilor, introducem notaţiile următoare:

$$u_{inc} = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right); \qquad u_{ref} = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Natura funcţiilor $f_1$ şi $f_2$ este determinată de condiţiile iniţiale la începutul şi capătul liniei. Funcţiile $f_1$ şi $f_2$ în caz general trebuie să permită să se ia derivata de ordinul 2 pe "$x$" şi pe "$t$", adică pentru $f_1$ faţă de $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v} f_1'\left(t - \frac{x}{v}\right); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f_1''\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

pentru $f_2$ faţă de $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{v} f_1'\left(t - \frac{x}{v}\right); \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} f_2''\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Deci $\frac{1}{v^2}\left[f_1''\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2''\left(t + \frac{x}{v}\right)\right] = \frac{1}{v^2}\left[f_1''\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_1''\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]$.

Rezolvarea ecuaţiei (9.8) corespunde expresiei :

$$i = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right). \qquad (9.10)$$

Notând $\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = i_{inc}$ ;

$$\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = i_{ref}$$

Obţinem : $i = i_{inc} + i_{ref}$ ; unde $i_{ref} = -\frac{u_{ref}}{z_c}$,

$$i = i_{inc} + i_{ref} . \qquad (9.11)$$

$f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ şi $\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$ - reprezintă respectiv unda incidentă a tensiunii şi curentului

$f_2\left(t-\frac{x}{v}\right)$ si $\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$ - reprezintă respectiv unda reflectată a tensiunii şi curentului.

**Exemplificaţie la argumentul** $\left(t-\frac{x}{v}\right)$.

Fie că într-un punct oarecare al liniei $t=t_1$ mărimea funcţiei $f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$ este egală cu $F_1$. Această marime "$f_1$" va fi aceeaşi în toate punctele liniei unde $x>x_1$ cu întârziere în timp $\frac{x-x_1}{v}$ şi deci determinata de viteză limitată a deplasării undei în linie.

Aşa, în punctul $x=x_2$, mărimea $f_1$ va fi egală cu $F_1$ pentru $t=t_2=t_1+\frac{x_2-x_1}{v}$.

În realitate :

$$f_1\left(t_2-\frac{x_2}{v}\right)=f_1\left(t_1+\frac{x_2-x_1}{v}-\frac{x_2}{v}\right)=f_1\left(t-\frac{x_1}{v}\right)=F_1.$$

Astfel, legea variaţiei undei incidente a tensiunei $f_1$ de la începutul liniei se repetă în orice punct al liniei, dar cu întârziere în timp.

### 9.3. Relaţiile dintre funcţiile $f_1$, $f_2$ şi $\varphi_1$, $\varphi_2$

Legătura dintre $f_1$ şi $\varphi_1$, de asemenea, dintre $f_2$ şi $\varphi_2$ se determină prin rezolvarea ecuaţiilor liniei fără pierderi :

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L_0\frac{\partial i}{\partial t}; \qquad (9.12)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C_0\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (9.13)$$

De unde

$$u=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{v}\right); \qquad (9.14)$$

$$i = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right); \tag{9.15}$$

$$\frac{df_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}{d\left(t - \frac{x}{v}\right)} = f_1'; \qquad \frac{d\varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right)}{d\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \varphi_1';$$

$$\frac{df_2\left(t + \frac{x}{v}\right)}{d\left(t + \frac{x}{v}\right)} = f_2'; \qquad \frac{d\varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)}{d\left(t + \frac{x}{v}\right)} = \varphi_2'.$$

Atunci ecuaţia (9.12) ne dă:

$$\frac{1}{v} f_1' - \frac{1}{v} f_2' = L_0\varphi_1' + L_0\varphi_2', \tag{9.16}$$

şi ecuaţia (9.13) ne dă:

$$\frac{1}{v}\varphi_1' - \frac{1}{v}\varphi_2' = C_0 f_1' + C_0 f_2'. \tag{9.17}$$

Din (9.16) şi (9.17) obţinem :

$$\left.\begin{aligned} f_1' - f_2' &= v \cdot L_0\left[\varphi_1' + \varphi_2'\right] \\ f_1' + f_2' &= \frac{1}{v \cdot C_0}\left[\varphi_1' - \varphi_2'\right] \end{aligned}\right\}, \tag{9.18}$$

unde

$$v \cdot L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_c,$$

$$\frac{1}{vC_0} = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_c.$$

$z_c$ - impedanţa caracteristică a liniei omogene fără pierderi

sau

$$\left.\begin{aligned} f_1' - f_2' &= z_c\left[\varphi_1' + \varphi_2'\right] \\ f_1' + f_2' &= z_c\left[\varphi_1' - \varphi_2'\right] \end{aligned}\right\}. \tag{9.19}$$

Prin urmare, avem :

$$\varphi_1' = \frac{f_1'}{z_c}, \tag{9.20}$$

$$\varphi_2' = -\frac{f_2'}{z_c}. \qquad (9.21)$$

Dacă derivatele funcţiilor ($\varphi_1'$ şi $f_1'$) sunt egale pentru orice $x$ şi $t$, atunci reiese că funcţiile ($\varphi_1$ şi $f_1$) sunt egale cu o exactitate până la o constantă.

Şi deci avem :

$$\varphi_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=\frac{1}{z_c}f_1\left(t-\frac{x}{v}\right), \qquad (9.22)$$

şi

$$\varphi_2\left(t+\frac{x}{v}\right)=-\frac{1}{z_c}f_2\left(t+\frac{x}{v}\right). \qquad (9.23)$$

În ecuaţiile (9.22) şi (9.23) lipsesc constantele de integrare deoarece se presupune că undele incidentă şi reflectată a curentului şi tensiunii nu conţin componentele ce depind de $x$ şi $t$.

Ecuaţiile (9.22) şi (9.23) pot fi scrise în formă respectivă:

$$i_{inc}=\frac{u_{inc}}{z_c}, \qquad (9.24)$$

$$i_{ref}=-\frac{u_{ref}}{z_c}. \qquad (9.25)$$

## 9.4. Procesele electromagnetice la deplasarea undei dreptunghiulare de-a lungul liniei

Fie că sursa de tensiune de curent continuu la care $z_{inter}=0$ se conectează la linia omogenă ne-încărcată cu parametrii distribuiţi $R_0=G_0=0$. De-a lungul liniei se deplasează unda electromagnetică incidentă.

Transportul iniţial al undei - frontul undei (frontul dreptunghiular) deplasându-se de-a lungul liniei creează între firele liniei câmp electric şi câmp magnetic.

Creşterea câmpului magnetic la frontul undei în timp de "$dt$" este: $d\psi = i \cdot L_0 \cdot dx$ ,

creşterea câmpului magnetic la frontul undei dă naştere f.e.m.:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -i \cdot L_0 \cdot \frac{dx}{dt} = -i \cdot L_0 \cdot v = -i\frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} =$$

$$= -i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = -i \cdot z_c = -u_{inc} = -u \cdot$$

La frontul undei apare f.e.m. de autoinducţie numeric egală cu tensiunea generatorului.

La frontul undei are loc încălzirea firelor liniei: firul de sus este unit cu polul pozitiv al sursei, iar al doilea fir - de jos - cu polul negativ.

La frontul undei apare curentul de deplasare :

$$i_{dep} = \frac{dq}{dt}; \quad unde \quad dq = C_0 \cdot u \cdot dx \quad şi \quad i_{dep} = \frac{dq}{dt} = C_0 \cdot u \cdot v = \frac{u_{inc}}{z_c}$$

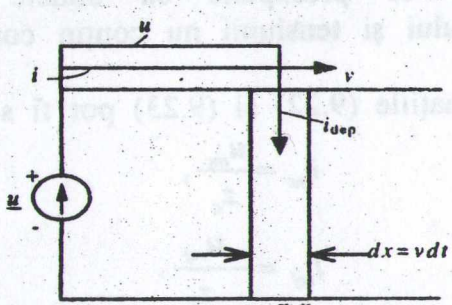



Fig.9.1

Astfel, curentul de deplasare, ce trece prin dielectricul la frontul undei este egal cu curentul undei incidente, ce trece prin firele liniei.

Unda electromagnetică, deplasându-se prin linie aportă pe fiecare unitate de lungime a liniei energie a câmpului electric $\frac{C_0 u_{inc}^2}{2}$ şi energie a câmpului magnetic $\frac{L_0 i_{inc}^2}{2}$. Se poate de demonstrat că energiile sunt egale între ele.

Într-adevar $u_{inc} = i_{inc} \cdot z_c = i_{inc} \cdot \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

Prin urmare $\frac{C_0 u_{inc}}{2} = \frac{C_0 \cdot i_{inc}^2 \cdot L_0}{2C_0} = \frac{L_0 i_{inc}^2}{2}$.

Atunci când unda incidenţă atinge capătul liniei la care este conectată o sarcină sau o altă linie, o parte din unda incidentă trece în sarcină, o alta parte se reflectă şi apare unda reflectată.

Care va fi forma undei ce trece în sarcină, care va fi forma undei reflectate şi cum ele se vor deforma în timp?

Pentru a răspunde la aceste întrebări se întrebuinţează schema echivalentă de substituire pentru studierea proceselor undulare, ce au loc în linia cu parametrii distribuiţi.

## 9.5. Schema echivalentă aplicată la studiul fenomenelor undulatoare în linia cu parametrii distribuiţi

Pentru a justifica metodica de alcătuire a schemei echivalente aplicăm fig.9.2 ce prezintă o linie cu parametrii distribuiţi cu o sarcină la bornele de la capătul ei. Din momentul unde unda incidentă atinge extremitaţile liniei, curentul $i_s$ circulă în sarcină şi la bornele sarcinii este creată tensiunea $u_s$.

Aplicând expresiile $\frac{L_0 i^2_{in\,c}}{2}$ şi introducând $\frac{u_i}{z_c}$ în loc de $i_i$ şi $-\frac{u_r}{z_c}$ în loc de $i_r$, obţinem :

$$\begin{cases} u_i + u_r = u_s \\ u_i - u_r = i_s \cdot z_c \end{cases}$$

de unde: $$2u_i = u_s + i_s \cdot z_c \,. \qquad (9.26)$$

Astfel, tensiunea $u_s$ de la extremitatea liniei şi curentul $i_s$ în sarcină, independent de caracterul sarcinei , sunt legate de unda incidentă $u_i$ prin ecuaţia (9.26).

Circuitul cu parametrii distribuiţi reprezentat în fig. 9.3 satisface această ecuaţie.

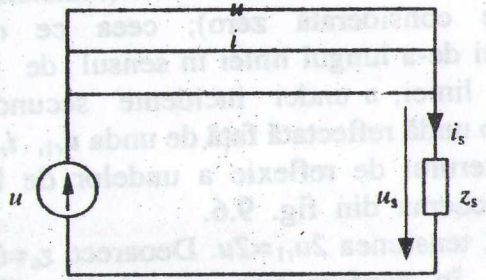



Fig. 9.2

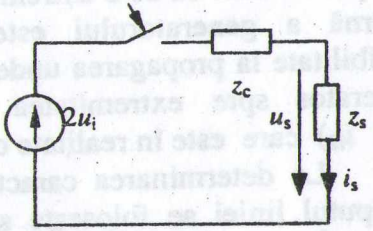



Fig. 9.3

Calculul fenomenelor tranzitorii în circuitele cu parametrii distribuiţi din fig.9.3 poate fi efectuat prin una dintre metodele aplicate la calculul circuitelor electrice cu parametrii concentraţi în regim tranzitoriu.

Calculul cu aplicarea schemei din fig. 9.3 permite de a determina $i_s=f(t)$ şi $u_s=f(t)$. După determinarea acestor funcţii se poate de determinat caracterul variaţiei în timp a tensiunii şi curentului undei reflectate: $u_r=f(t)$ şi $i_r=f(t)$, sau

$$\left.\begin{aligned} u_r(t) &= u_s(t) - u_i(t); \\ i_r(t) &= -\frac{u_r(t)}{z_c};\ unde \quad z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \end{aligned}\right\}. \qquad (9.27)$$

Examinăm câteva exemple de aplicaţie a schemei echivalente.

## 9.6. Reflexia undelor la sfârşitul liniei

Să presupunem că undele progresive de tensiune şi de curent au ajuns la sfârşitul unei linii omogene, cu impedanţa caracteristică $z_c$, închisă pe un circuit oricât de complex cu parametrii concentraţi. Datorită reflexiei undelor incidente la sfârşitul liniei vor aparea undele reflectate şi la bornele circuitului final, obţinem :

$$u_2 = u_{2i} + u_{2r};$$

$$i_2 = i_{2i} + i_{2r}.$$

a) Conectarea unei linii deconectată la extremitatea sa la o sursă de curent continuu (fig.9.4). În condiţiile unei linii fără pierderi, asemănator unui circuit oscilant fără pierderi i-au naştere oscilaţii.

Perioada oscilaţiilor poate fi repartizată în patru părţi sau stadii cu durata egală de $\frac{l}{v}$, unde $l$ - lungimea liniei, $v$ - viteza propagării undei. La examinarea acestor patru stadii trebuie să folosim două scheme echivalente diferite. Prima din acestea (fig. 9.5) corespunde extremităţii deschise la linie ($z_c = \infty$) pentru cazul când unda incidentă ajunge la extremitatea liniei. A doua schemă (fig. 9.6), corespunde cazului sosirii undei reflectate la bornele de intrare a liniei, la care este conectat generatorul de tensiune continuu, rezistenţa internă a căruia este considerată zero ($z_s=0$).

Examinăm separat fiecare stadie a fenomenului:

1) Primul stadiu. O unda de tensiune $u_{i1}=u$ şi o undă de curent $i_{i1}=\frac{u_{i1}}{z_c}=i$ se propagă de la generator spre extremitatea liniei. Primul stadiu este ilustrat în fig. 9.4a.

2) Al doilea stadiu corespunde deplasării undei reflectate $u_{r1}$ şi $i_{r1}$ de la extremitatea liniei spre începutul liniei. Se aplică schema din fig. 9.6 pentru determinarea $u_{r1}$. Această schemă este alcătuită conform metodei expuse în 9.5. În această schemă se conectează la sursa de tensiune $2u_{i1}=2u$ impedanţa caracteristică a liniei $z_c$ şi impedanţa sarcinii $z_s=\infty$ (linia este deconectată la capăt).

Din schema din fig. 9.5 rezultă că tensiunea la bornele sarcinii este egală cu tensiunea dublă a undei incidente. Deci, pentru $z_s \to \infty$, avem :

$$u_{z_s} = 2u_{i1}\frac{z_s}{z_s + z_c} = 2u_{i1} = 2u .$$

Conform expresiilor (9.27) unda reflectată a tensiunii

$$u_{r1} = u_s - u_{i1} = 2u_{i1} - u_{i1} = u_{i1} = u .$$

Unda reflectată a curentului

$$i_{r1} = -\frac{u_{r1}}{z_c} = -i_{i1} = -i\,.$$

Astfel, în decursul primelor două stadii a fenomenului tranzitoriu unda reflectată $u_{r1} = u$, $i_{r1} = -i$ se propagă de la extremitatea liniei spre începutul său. Starea rezultantă a liniei este determinată prin suprapunerea undei incidente primară ($u_{i1}$, $i_{i1}$) cu unda reflectată primară ($u_{r1}$, $i_{r1}$). Epura distribuției tensiunii și curentului de-a lungul liniei pentru un oarecare moment al stadiului doi, este reprezentată în fig. 9.4b.

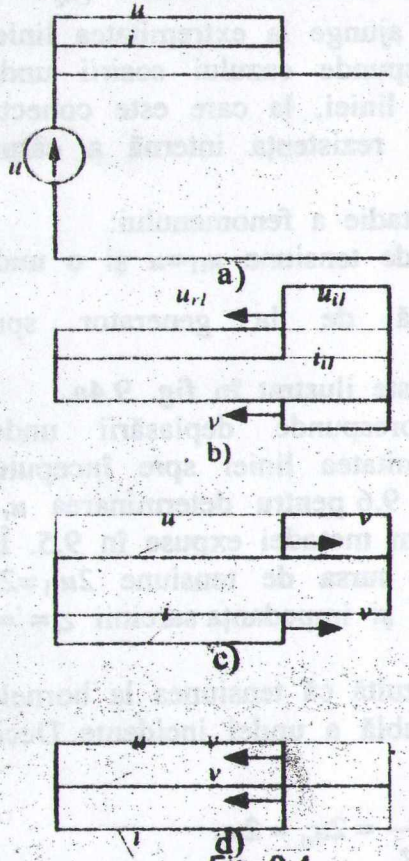


Fig. 9.4.

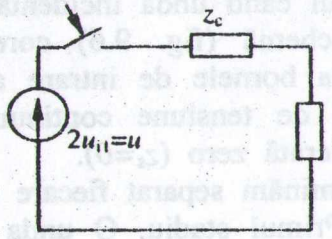


Fig. 9.5.

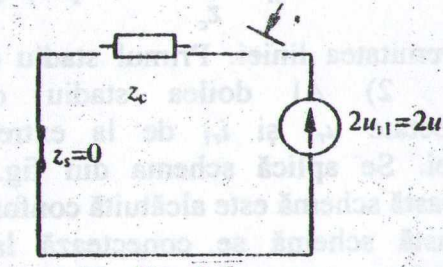


Fig 9.6.

3) Stadiul al treilea al acestui fenomen este acela unde unda $u_{r1}$, $i_{r1}$, atingând începutul liniei este reflectată de acest început de linie ca de o extremitate scurcircuitată a liniei (rezistența internă a generatorului este considerată zero); ceea ce dă posibilitate la propagarea undei de-a lungul liniei în sensul de la generator spre extremitatea liniei, a undei incidente secunde ($u_{i2}$, $i_{i2}$) care este în realitate o undă reflectată față de unda $u_{r1}$, $i_{r1}$.

La determinarea caracterului de reflexie a undelor de la începutul liniei se folosește schema din fig. 9.6.

În această schemă $z_s=0$, tensiunea $2u_{r1}=2u$. Deoarece $z_s=0$, tensiunea la bornele sarcinii, în conformitate cu relațiile din (9.27), este egală cu suma undei incidente (în cazul prezent $u_{r1}=u$) și a tensiunii undei reflectate de la generator spre extremitatea liniei; ceea ce reprezintă a doua undă incidentă.

Prin urmare : $0=u+u_{i2}$.

De unde : $u_{i2}=-u$; $i_{i2}=\frac{u_{i2}}{z_r}=-i$.

Starea rezultantă a liniei în decursul stadiului al treilea al fenomenului este reprezentă în fig.9.4c. Această stare decurge din suprapunerea a trei unde: a primei unde incidente $u_{i1}$, $i_{i1}$, a undei reflectate de la extremitatea undei $u_{r1}$, $i_{r1}$, și undei a doua incidente $u_{i2}$, $i_{i2}$.

4) În decursul stadiului al patrulea unda a patra, determinată prin reflexia a doua a undei incidente de la extremitatea deconectată a liniei, se suprapune la cele trei unde precedente.

Reflexia secundă a undei incidente de la extremitatea deconectată a liniei decurge prin aplicarea schemei echivalente din fig. 9.5 cu singura diferență că în loc de $2u_{i1}=-2u$.

Pentru unda reflexiei secunde $u_{r2}=-u$, $i_{r2}=i$, starea rezultantă a liniei la al patrulea stadiu (fig. 9.4d) este caracterizată prin suprapunerea următoarelor patru unde:

$$u_{i1}+u_{r1}+u_{i2}+u_{r2}=u+u-u-u=0,$$

$$i_{i1}+i_{r1}+i_{i2}+i_{r2}=i+i-i-i=0.$$

Astfel, la sfârşitul stadiului patru, tensiunea de-a lungul liniei, şi curentul sunt zero. Linia primeşte starea ce a avut-o la începutul primului stadiu. Fenomenul se repetă până la infinit, deoarece $R_0$ şi $G_0$ sunt considerate zero. În realitate $R_0$ şi $G_0$ diferă de zero şi fenomenul oscilatoriu amortizează progresiv şi un regim, corespunzător regimului permanent în linia de curent continuu, se stabileşte în linia considerată.

Din expresiile obţinute se poate stabili relaţia dintre undele incidente şi reflectate când reflexia undelor se produce la sfârşitul unei linii deschise sau scurtcircuitate. În cazul unei linii deschise, punând $z_s = \infty$, la sfârşitul liniei avem: $u_r = u_i$, $i_r = -i_i$, iar în cazul liniei scurtcircuitate, punând $z_s = 0$, la sfârşitul liniei avem: $u_r = -u_i$, $i_r = i_i$, adică, în aceste cazuri, undele reflectate au aceeaşi valoare ca cele incidente cu deosebirea în cazul liniei deschise cu schimbarea semnului este reflectată unda de curent, iar în cazul liniei scurtcircuitate, unda de tensiune. Aşadar, în urma suprapunerii undelor reflectate peste cele incidente, în linia deschisă creşte de două ori tensiunea de la sfârşitul liniei, iar în linia scurtcircuitată, creşte de două ori curentul de la sfârşitul liniei.

Aceste rezultate pot fi explicate în modul următor. Şi la mers în gol şi la scurtcircuit undele incidente cu energia lor specifică sunt reflectate complet de la sfârşitul liniei, deoarece la sfârşitul liniei energia nu este consumată. De aceea, în porţiunea de linie până la care au ajuns undele reflectate, energia este de două ori mai mare decât energia undelor incidente, prin urmare de patru ori mai mare decât energia câmpului magnetic al undei de curent şi de patru ori mai mare decât energia câmpului electric al undei de tensiune incidente, deoarece aceste energii sunt egale între ele.

La mersul în gol al liniei, curentul la sfârşitul liniei trebuie să fie nul. De aceea, când unda de curent incidentă ajunge la sfârşitul liniei apare o undă de curent reflectată egală ca valoare şi opusă ca semn, şi curentul la sfârşitul liniei scade până la zero, iar energia câmpurilor magnetice legate cu undele de curent incidentă şi reflectată se transformă în energia

câmpului electric. Creşterea de patru ori la sfârşitul liniei, a energiei câmpului electric, aduce după sine creşterea de două ori a tensiunii de la sfârşitul liniei. Această creştere a tensiunii, legată de transformarea energiei câmpului magnetic în energia câmpului electric, se va propaga de la sfârşitul liniei spre începutul acesteia.

În cazul scurtcircuitării liniei, tensiunea la sfârşitul liniei trebuie să fie nulă. De aceea, când unda de tensiune incidentă ajunge la sfârşitul liniei, apare unda de tensiune reflectată, egală cu ea ca valoare şi opusă ca semn, şi tensiunea de la sfârşitul liniei scade până la zero, iar energia câmpurilor electrice, legate de undele de tensiune incidentă şi reflectată se transformă în energie a câmpului magnetic. Mărirea de patru ori - la sfârşitul liniei - a energiei câmpului magnetic atrage după sine creşterea de două ori a curentului la sfârşitul liniei. O asemenea creştere a curentului, legată de transformarea energiei câmpului electric în energia câmpului magnetic, se va propaga de la sfârşitul liniei către începutul ei.

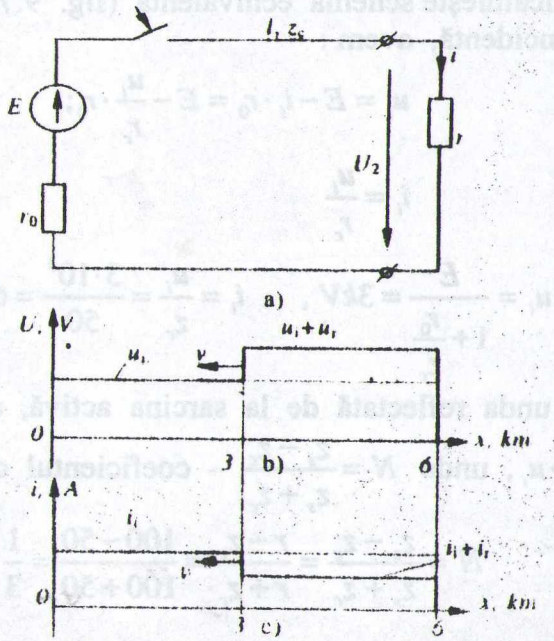



Fig 9.7

**Exemplul 1**

La o linie lungă de $l=6\ km$, cu impedanţa caracteristică $z_c=50\ \Omega$, alimentată de la o sursă de tensiune constantă de $E=6\ kV$ şi rezistenţa internă $r_0=50\ \Omega$, se conectează o sarcină activă cu $r=100\ \Omega$. Viteza propagării undei $v=1.5\cdot10^8\frac{m}{s}$. Să se determine repartiţia tensiunii şi curentului după $t=20\,10^{-6}\ s$.

Se dă:

$E=6\ kV;\ r_0=50\ \Omega$

$l=6\ km;$

$v=1.5\cdot10^8\frac{m}{s}$

$z_c=50\ \Omega;\ r=100\ \Omega$

$t=20\,10^{-6}\ s.$

---

$u(t)$-? $i(t)$-?

**Rezolvare**:

1. Se alcătuieşte schema echivalentă (fig. 9.7,a).

Pentru unda incidentă, avem :

$$u_i = E - i_i \cdot r_0 = E - \frac{u_i}{r_c}\cdot r_0;$$

$$i_i = \frac{u_i}{r_c}$$

de unde $u_i = \dfrac{E}{1+\dfrac{r_0}{z_c}} = 3kV$, $\quad i_i = \dfrac{u_i}{z_c} = \dfrac{3\cdot10^3}{50} = 60A$.

Pentru unda reflectată de la sarcina activă, avem:

$u_r = N\cdot u_i$, unde $N = \dfrac{z_s - z_c}{z_s + z_c}$ - coeficientul de reflexie

$$N = \frac{z_s - z_c}{z_s + z_c} = \frac{r - z_c}{r + z_c} = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3}.$$

$$u_r = N \cdot u_i = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1kV,$$

Deci:

$$i_r = -\frac{u_r}{z_c} = -\frac{10^3}{50} = -20A.$$

Epurile distribuției tensiunii și curentului sunt reprezentate respectiv în fig. 9.7b și fig. 9.7c.

**Exemplul 2**

O sursă cu tensiunea constantă $u=10\ kV$ este conectată la un cablu electric lung de $l_1=60\ km$ și $r_{c1}=50\ \Omega$, iar cablul este unit la o linie aeriană cu $l_2=100\ km$, și $r_{c2}=400\ \Omega$. În punctul de legatură dintre cablu și linia aeriană se află un condensator cu $C=5.62\ \mu F$. Să se determine legile mărimilor $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_c(t)$ în regim tranzitoriu (fig. 9.8).

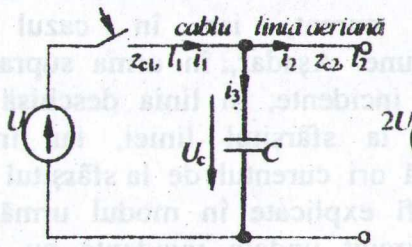



Fig. 9.8

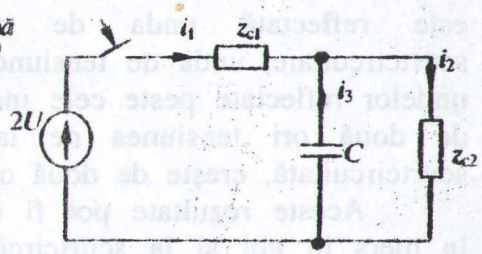



Fig. 9. 9

Rezolvare:

1. Se alcătuiește schema echivalentă (fig. 9.9), ce corespunde momentului când unda electromagnetică ajunge la sfârșitul liniei aeriene.

2. Pentru schema din fig. 9.9 se aplică metoda clasică la determinarea mărimilor în regim tranzitoriu.

a) Valoarea inițială a tensiunii la bornele condensatorului pentru schema până la comutație și pentru $t=0$; $u_c(0)=0$ (legea a doua a comutației).

b) Se determină rădăcina ecuației caracteristice prin aplicarea expresiei $z(p)=0$ (fig. 9.10) (schema dupa comutație).

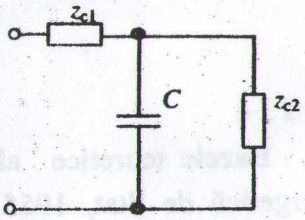



Fig. 9.10

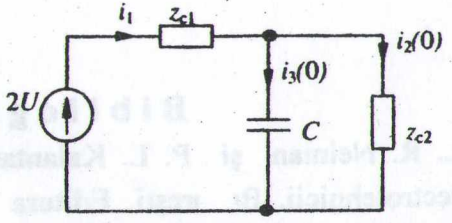



Fig. 9.11

$$z(j\omega) = z_{c1} + \frac{\frac{1}{j\omega c} \cdot z_{c2}}{\frac{1}{j\omega c} + z_{c2}};$$

$$j\omega \to p$$

$$z(p) = z_{c1} + \frac{\frac{1}{pc} \cdot z_{c2}}{\frac{1}{pc} + z_{c2}} = 0$$

sau $$z_{c1} \cdot z_{c2} \cdot pc + z_{c1} + z_{c2} = 0,$$

de unde : $$pc = -\frac{z_{c1} + z_{c2}}{z_{c1} \cdot z_{c2} \cdot c} = -400 s^{-1}.$$

c) Expresiile funcţiilor

$$i_1(t) = i_{1f} + i_{1l}; \quad i_2(t) = i_{2f} + i_{2l}$$

$$i_3(t) = i_{3f} + i_{3l}; \quad i_c(t) = i_{cf} + i_{cl}$$

unde componentele forţate $i_{1f}$, $i_{2f}$, $i_{3f}$, $u_{cf}$, se determină pentru regimul stabilit după comutaţie (schema se considera după comutaţie) şi corespund respectiv expresiilor

$$i_{1f} = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}}; \quad i_{2f} = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}}; \quad u_{cf} = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot z_{c2};$$

$i_{3f}^{e} = 0.$

Deoarece curentul continuu nu trece prin condensator, iar componentele libere ale mărimilor $i_{1l}$, $i_{2l}$, $i_{3l}$, $u_{cl}$, au expresiile, ce corespund caracterului rădăcinii ecuaţiei caracteristice $p$=-400 $s^{-1}$ :

$$i_{1l} = Ae^{pt}; \quad i_{2l} = Be^{pt}; \quad i_{3l} = Ce^{pt}; \quad u_{cl} = De^{pt}.$$

Deci, avem: $i_1(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} + Ae^{pt}; \quad i_2(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} + Be^{pt};$

$$i_3(t) = Ce^{pt}; \quad u_c(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot z_{c2} + De^{pt}.$$

unde A, B, C, D - sunt constantele de integrare şi se determină prin aplicarea condiţiilor iniţiale pentru $t=0$

d) Determinarea constantelor de integrare

Pentru $t=0$, avem :

$$i_1(0) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} + A; \quad i_2(0) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} + B;$$

$$i_3(0) = C; \quad u_c(0) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot z_{c2} + D.$$

Luând în consideraţie că $u_c(0)=0$, avem : $D = -\frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} \cdot z_{c2}$.

La determinarea constantelor A, B, C alcătuim sistemul de ecuaţii prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff pentru schema din fig. 9.11. la $t=0$ :

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0); \\ i_1(0) \cdot z_{c1} + u_c(0) = 2u; \\ i_2(0) \cdot z_{c2} - u_c(0) = 0. \end{cases}$$

de unde $i_2(0)=0; \quad i_1(0) = i_3(0) = \frac{2u}{z_{c1}}$

Deci avem :

$$A = i_1(0) - \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} = \frac{2uz_{c2}}{z_{c1}(z_{c1} + z_{c2})};$$

$$B = -\frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}}; \quad C = i_3(0) = \frac{2u}{z_{c1}}.$$

Astfel, am obținut :

$$i_1(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} + \frac{2uz_{c2}}{z_{c1}(z_{c1} + z_{c2})} e^{pt};$$

$$i_2(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} - \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} e^{pt};$$

$$i_3(t) = \frac{2u}{z_{c1}} e^{pt};$$

$$u_c(t) = \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} z_{c2} - \frac{2u}{z_{c1} + z_{c2}} z_{c2} e^{pt}.$$

sau

$$i_1(t) = 44.45 + 355.5e^{-400t}, A;$$

$$i_2(t) = 44.45(1 - e^{-400t}), A;$$

$$i_3(t) = 400e^{-400t}, A;$$

$$u_c(t) = 17.78(1 - e^{-400t}), kV.$$

## Bibliografie


1. L. R. Neiman şi P. L. Kalantarov. Bazele teoretice ale electrotehnicii. Bucureşti. Editura energetică de Stat, 1955.
2. L. R. Neiman, K. Demircean. Teoreticeskie osnovî electrotehniki. M - L. Energia, 1966.
3. L. A. Bessonov. Teoreticeskie osnovî electrotehniki. M. Vîsşaia şcola, 1973.
4. G. V. Zeveke i drughie. Osnovî teorii ţepei. M-L. Energia, 1981.
5. C. Şora. Bazele electrotehnicii. Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1980.
6. M. Preda, P. Cristea. Bazele electrotehnicii, vol. II. Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1980.
7. C. Şimoni. Electrotehnica teoretică. Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1980.
8. A. Simion. Electrotehnica. Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1981.
9. H. Rosman. Circuite electrice liniare, vol. II. I. P. Iaşi, 1974.
10. A. Creţu şi alţii. Electrotehnica. Iaşi, 1980.
11. A. Timotin. Lecţii la bazele electrotehnicii. Editura didactică şi pedagogică. Bucureşti, 1980.